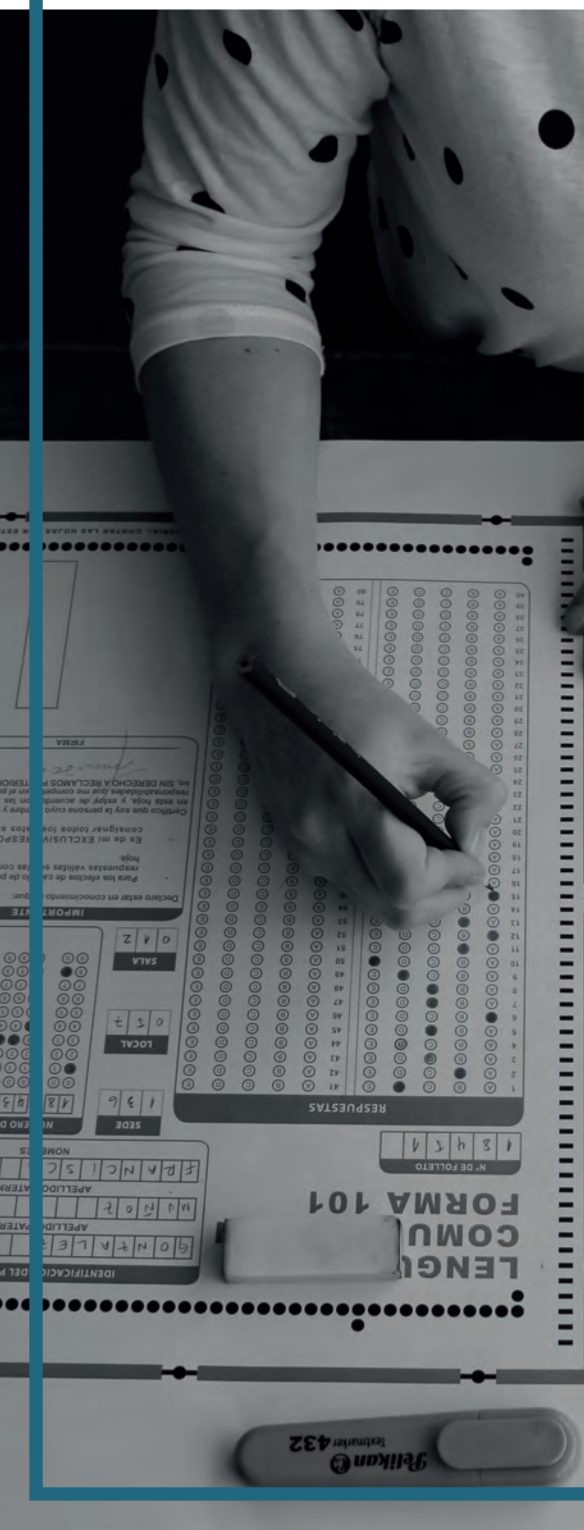
PROCESO DE ADMISIÓN 2019

PSU®

DEMRE

PIONEROS • EXPERTOS • CONFIABLES



RESOLUCIÓN MODELO DE PRUEBA: MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DEL MODELO DE PRUEBA DE MATEMÁTICA

PRESENTACIÓN

En esta publicación se resolverán las preguntas que aparecen en el Modelo de Prueba de Matemática publicado el presente año, en este sitio web.

El objetivo de esta publicación es entregar información a profesores y postulantes acerca de los temas y habilidades cognitivas que se evalúan en cada uno de los ítems de este modelo, de manera que sirva de retroalimentación al trabajo que realizan. Para ello, se muestra una propuesta de resolución de cada pregunta, junto a una ficha de referencia curricular de cada una de ellas, explicitando el eje temático y el nivel al cual pertenece, así como también el contenido, el objetivo fundamental y la habilidad cognitiva medida, además, de la opción correcta (clave).

Cabe hacer notar que la propuesta de resolución de cada ítem se realiza de forma bien detallada, con el propósito de que el postulante pueda seguir cada paso desarrollado, sabiendo que algunos de ellos se pueden omitir.

Este documento ha sido elaborado por el Comité de Matemática del Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE), dependiente de la Vicerrectoría de Asuntos Académicos de la Universidad de Chile.

RESOLUCIÓN DE LAS PREGUNTAS

PREGUNTA 1

$$\frac{\frac{3}{5}-\frac{1}{6}}{-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}}=$$

A) $-\frac{1}{5}$

B) -1

C) $-\frac{26}{35}$

D) $-\frac{91}{360}$

E) $-\frac{2}{5}$

RESOLUCIÓN

Para resolver las operaciones entre números racionales del ítem, se debe recordar que:

si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números reales, entonces:

- $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$
- $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$

Si se opera en el numerador y denominador de la fracción del enunciado, se tiene:

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{6}=\frac{3\cdot 6-1\cdot 5}{5\cdot 6}=\frac{18-5}{30}=\frac{13}{30}$$

$$\frac{\frac{3}{5}-\frac{1}{6}}{-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}}$$

$$-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{1\cdot 6-5\cdot 4}{4\cdot 6}=\frac{6-20}{24}=\frac{-\cancel{14}}{\cancel{24}}=\frac{-7}{12}$$

Simplificando por *2*

Luego,

$$\frac{\frac{3}{5}-\frac{1}{6}}{-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{13}{30}}{\frac{-7}{12}}$$

$$= \frac{13}{\cancel{30}_{5}} \cdot \frac{\cancel{12}^{2}}{-7} \longrightarrow \text{Simplificando por } 6$$

$$= \frac{13}{5} \cdot \frac{2}{-7}$$

$$= \frac{13 \cdot 2}{5 \cdot -7}$$

$$= \frac{26}{-35}$$

$$= -\frac{26}{35}$$

Por lo tanto, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Operaciones con números racionales

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 2

En la recta numérica, ¿cuál de los siguientes números racionales se encuentra más cercano al número uno?

A) $\frac{3}{2}$

B) $\frac{4}{3}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{6}{5}$

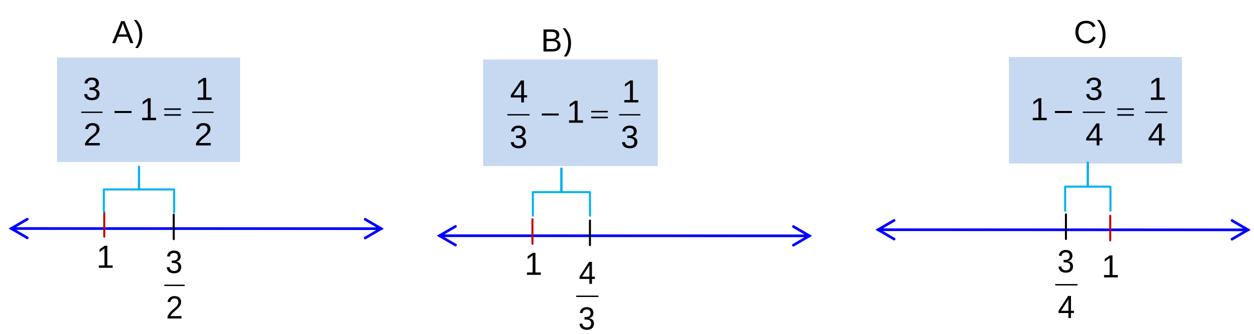
E) $\frac{5}{6}$

RESOLUCIÓN

Una manera de determinar cuál de los números racionales dados en las opciones está más cerca del número uno es comparar cada fracción con el 1, calculando la distancia entre la fracción y el número 1 en la recta numérica.

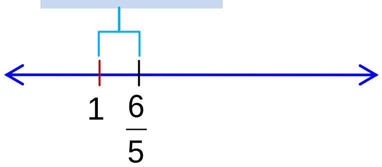
> **Recuerde que:**
> la distancia entre dos números en la recta numérica se puede calcular restando al número mayor el número menor.

La distancia en la recta numérica entre cada fracción dada en las opciones y el número 1 se calcula tal como se muestra a continuación:



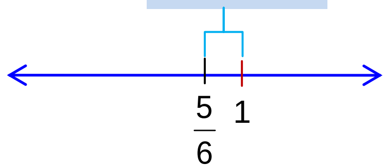
D)

$$\frac{6}{5}-1=\frac{1}{5}$$



E)

$$1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$



Recuerde que:

si b y d son números enteros positivos y $b > d$, entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{d}$.

Como se busca la distancia menor, se comparan las distancias anteriores, por lo que al ordenarlas de menor a mayor se obtiene lo siguiente:

	E)		D)		C)		B)		A)
Distancia menor →	$\frac{1}{6}$	<	$\frac{1}{5}$	<	$\frac{1}{4}$	<	$\frac{1}{3}$	<	$\frac{1}{2}$

Por lo tanto, la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Representación de números racionales en la recta numérica

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 3

Si a, b y c son dígitos, ¿cuál de las siguientes fracciones es **siempre** igual al número decimal $0{,}a\overline{bc}$?

A) $\dfrac{99a + 10b + c}{99}$

B) $\dfrac{a}{10} + \dfrac{10b + c}{99}$

C) $\dfrac{99a + 10b + c}{990}$

D) $\dfrac{999a + 100b + 10c}{990}$

E) $\dfrac{100a + 10b + c}{1.000}$

RESOLUCIÓN

Para determinar la expresión que representa siempre al número decimal $0{,}a\overline{bc}$ se puede efectuar el siguiente procedimiento:

Como $0{,}a\overline{bc} = 0{,}abcbc\ldots$, se tiene que:
$0{,}abcbc\ldots \cdot 1.000 = abc{,}bcbc\ldots = abc{,}\overline{bc}$

Como $0{,}a\overline{bc} = 0{,}abcbc\ldots$, se tiene que:
$0{,}abcbc\ldots \cdot 10 = a{,}bcbc\ldots = a{,}\overline{bc}$

$$x = 0{,}a\overline{bc}$$
$$1.000x = 0{,}a\overline{bc} \cdot 1.000$$
$$1.000x = abc{,}\overline{bc}$$

$$x = 0{,}a\overline{bc}$$
$$10x = 0{,}a\overline{bc} \cdot 10$$
$$10x = a{,}\overline{bc}$$

Ahora, se efectúa la resta 1.000x – 10x de la siguiente manera:

$$1.000x - 10x = abc{,}\overline{bc} - a{,}\overline{bc}$$
$$990x = abc - a$$

$$\begin{array}{r} abc{,}\cancel{\overline{bc}} \\ -\quad a{,}\cancel{\overline{bc}} \\ \hline abc - a \end{array}$$

Recuerde que:
si ***m***, ***p*** y ***q*** son dígitos, entonces la descomposición multiplicativa del número ***mpq***, es ***100m*** + ***10p*** + ***q***.

Para efectuar la resta abc – a, se debe hacer la descomposición multiplicativa de abc, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} abc - a &= 100a + 10b + c - a \\ &= (100a - a) + 10b + c \\ &= 99a + 10b + c \end{aligned}$$

Por último, de la igualdad 990x = abc – a = 99a + 10b + c se despeja x de la siguiente manera:

$$990x = 99a + 10b + c$$

$$x = \frac{99a + 10b + c}{990}$$

Expresión que se encuentra en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Transformación de números decimales semiperiódicos a fracción

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 4

En la tabla adjunta se muestran los tiempos que demoraron cuatro atletas en correr 100 metros. Según los datos de la tabla, ¿cuál de los siguientes valores es la resta de los tiempos, en segundos, entre los dos atletas más rápidos?

Atleta	Tiempo en segundos
Andrés	9,63
Bernardo	$\frac{39}{4}$
Carlos	$\frac{979}{100}$
Danilo	$9\frac{69}{100}$

A) 3,42

B) 0,12

C) 0,06

D) 0,555

E) 0,04

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál es la resta del tiempo entre los dos atletas más rápidos, se puede realizar lo siguiente:

- Primero: ordenar los datos de la tabla de menor a mayor para obtener los dos tiempos menores, que corresponden a los atletas más rápidos en correr los 100 metros.
- Segundo: restar los valores de los dos tiempos menores.

Recuerde que:

- para transformar un número racional $\frac{m}{n}$ a su forma decimal se debe dividir el numerador por el denominador.
- para transformar el número mixto $p\frac{m}{n}$ a su forma decimal se debe sumar a p el número obtenido de dividir m por n.

Así, para ordenar los tiempos de menor a mayor se pueden escribir las fracciones como números decimales, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Atleta	Tiempo en segundos
Andrés	9,63
Bernardo	$\frac{39}{4} = 39:4 = 9{,}75$
Carlos	$\frac{979}{100} = 9{,}79$
Danilo	$9\frac{69}{100} = 9 + \frac{69}{100} = 9 + 0{,}69 = 9{,}69$

De esta forma, al ordenar de menor a mayor los tiempos, se tiene:

$$\underbrace{9{,}63 < 9{,}69}_{\text{restando}} < 9{,}75 < 9{,}79$$

$$9{,}69 - 9{,}63 = 0{,}06$$

De esta forma, se determina que la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Número

Área Temática: Número

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Resolución de problemas que involucran números racionales

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 5

El precio de venta de cierto tipo de televisor es \$ v, con v un número entero. Por error se vendió un cierto número de ellos en \$ e cada uno, con e un número entero menor que v. El vendedor reportó una pérdida total de \$ d, con d un número entero. Respecto a la venta de estos televisores, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones se puede(n) deducir?

I) La cantidad de televisores que se vendieron con el precio erróneo, se representa con la expresión $\dfrac{d}{v - e}$.

II) $v > d$

III) v no es divisor de d.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

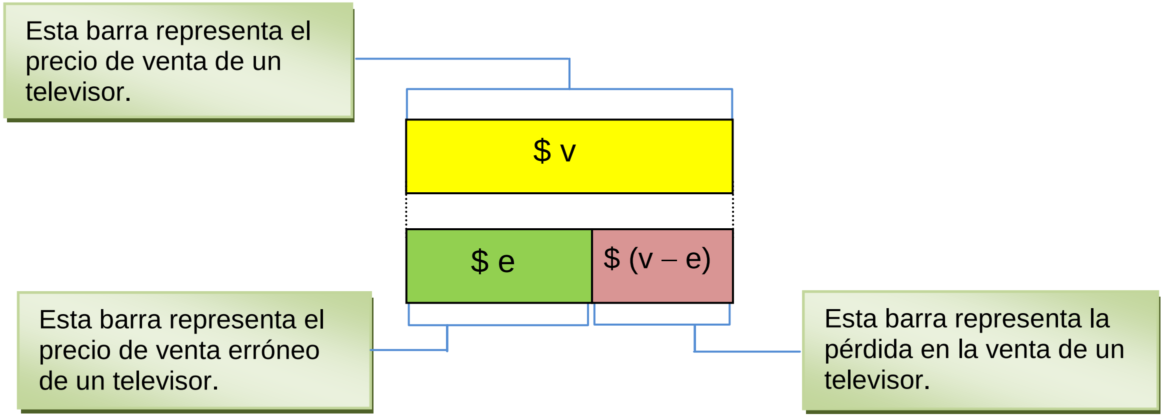
D) Solo I y III

E) Solo II y III

RESOLUCIÓN

Para responder este ítem se debe determinar si las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) se pueden deducir de la información dada en el enunciado.

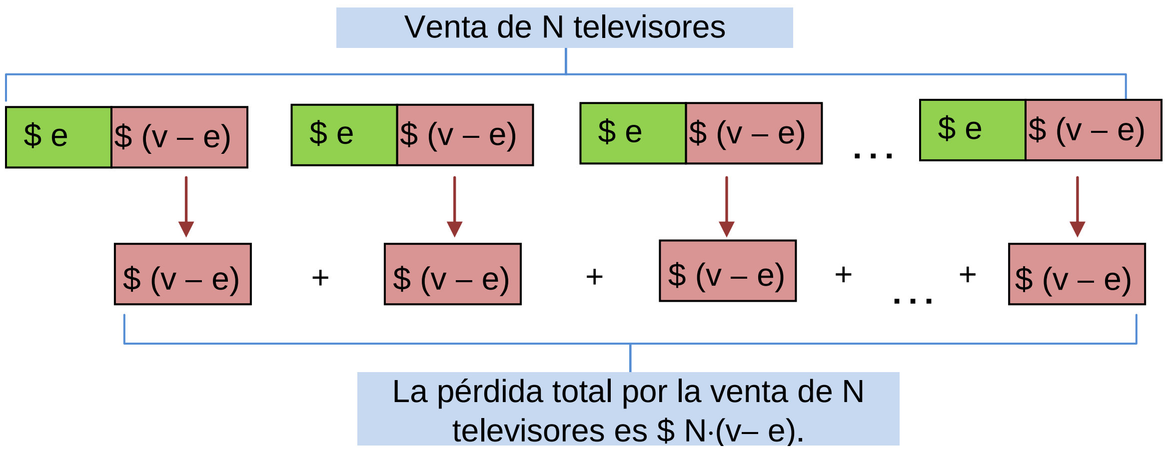
Los datos de la situación planteada en la pregunta se pueden representar mediante barras, tal como se muestra a continuación:



De la representación anterior, se establece que el precio de venta por un televisor, $ v, es igual a la suma entre el precio de venta erróneo, $ e, y la pérdida por la venta de un televisor, $ (v – e).

Para probar la veracidad de la afirmación dada en I), se considerará la venta de N televisores con el precio erróneo.

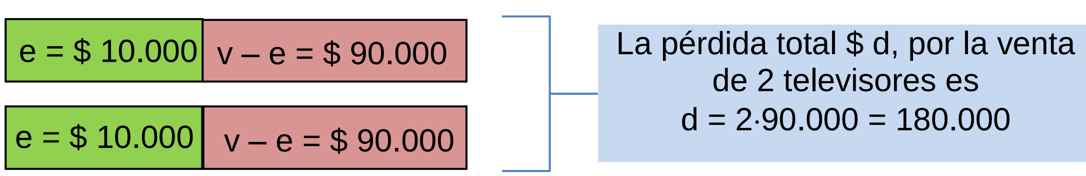
En la siguiente representación se muestra la pérdida en la venta de estos N televisores:



Ahora, como del enunciado se tiene que la pérdida total por la venta de los televisores es $ d, se puede establecer la igualdad N·(v – e) = d y al despejar N en esta igualdad se tiene $N = \dfrac{d}{v - e}$.

Por lo tanto, la afirmación dada en I) se puede deducir del enunciado.

En II), si se considera, por ejemplo, que v = $ 100.000, e = $ 10.000 y que en la tienda se venden 2 televisores, se puede establecer la siguiente representación:



Luego, 100.000 < 180.000, concluyendo que no siempre v > d, con lo que se comprueba que la afirmación en II) no se puede deducir.

En III), si se considera que se venden 20 televisores a los mismos valores del ejemplo dado en II), se tiene que v = 100.000 y d = 1.800.000, luego v es divisor de d. Por lo tanto, la afirmación en III) no se puede deducir.

De esta forma, se concluye que solo la afirmación en I) se puede deducir, luego la clave es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Resolución de problemas que involucran números racionales

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: A

PREGUNTA 6

En una calculadora, cada vez que se suman números decimales, el resultado final que muestra el visor está truncado a la centésima. Si se efectúa la suma 0,1666 + 0,164 + 0,167, ¿cuál de los siguientes valores será el resultado que mostrará el visor de esta calculadora?

A) 0,49

B) 0,497

C) 0,50

D) 0,48

E) 0,498

RESOLUCIÓN

Para responder la pregunta se debe realizar la adición dada en el enunciado y luego, aproximar el resultado a la centésima por truncamiento.

> **Recuerde que:**
> aproximar un número por truncamiento a la centésima, es considerar dicho número solo hasta el dígito que se encuentra en la centésima, es decir, al truncar ***0,abcd***, con a, b, c y d dígitos, a la centésima se obtiene ***0,ab***.

Así, al sumar los números del enunciado se tiene:

$$0{,}1666 + 0{,}164 + 0{,}167 = 0{,}4976$$

Al truncar 0,4976 a la centésima se obtiene 0,49. Luego, la clave se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Aproximación de racionales a través del truncamiento

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 7

¿Cuál de las siguientes expresiones es **siempre** igual a $(p^{n - m - 1})^2$, con $p \neq 0$?

A) $p^{n^2 - m^2 - 1}$

B) $p^{2n} - p^{2m} - p^2$

C) $\dfrac{p^{n^2}}{p^{(m + 1)^2}}$

D) $p^{(n - m - 1)^2}$

E) $\dfrac{p^{2n}}{p^{2(m + 1)}}$

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de las expresiones dadas en las opciones es igual a $(p^{n - m - 1})^2$, con $p \neq 0$, se puede efectuar el siguiente desarrollo:

$(p^{n - m - 1})^2$

Aplicando $(a^c)^b = a^{cb}$, con $a \neq 0$

$p^{2n - 2m - 2}$

Aplicando $-a - b = -(a + b)$

$p^{2n - (2m + 2)}$

Aplicando $a^{c - b} = \dfrac{a^c}{a^b}$, con $a \neq 0$ y factorizando por 2

$\dfrac{p^{2n}}{p^{2(m + 1)}}$

Expresión que se encuentra en la opción E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.

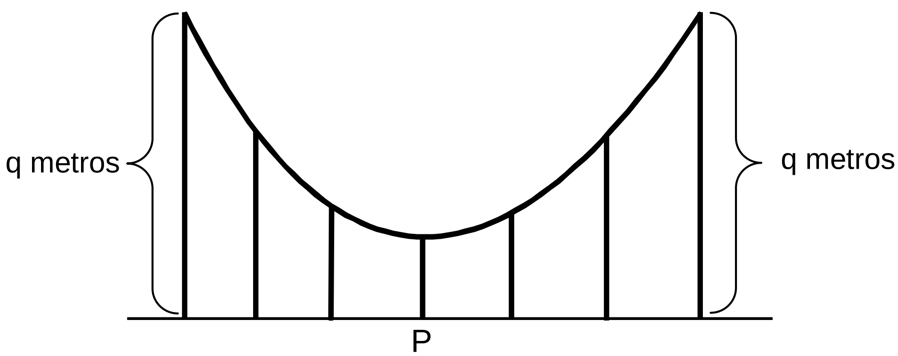
Contenido: Potencias de base racional y exponente entero

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 8

Una patinadora se desliza sobre una superficie sostenida por pilares verticales, tal como se representa en la figura adjunta. La medida del pilar de mayor altura es q metros. Además, la superficie es simétrica con respecto al pilar P y desde el pilar mayor hasta P la altura de cada pilar es $\frac{2}{3}$ de la altura del pilar anterior. Si la superficie se sostiene sobre n pilares (con n un número impar), ¿a qué distancia del suelo se encuentra la patinadora cuando está sobre el pilar P?



A) $q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

B) $\frac{2qn}{3}$

C) $\left(\frac{2q}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

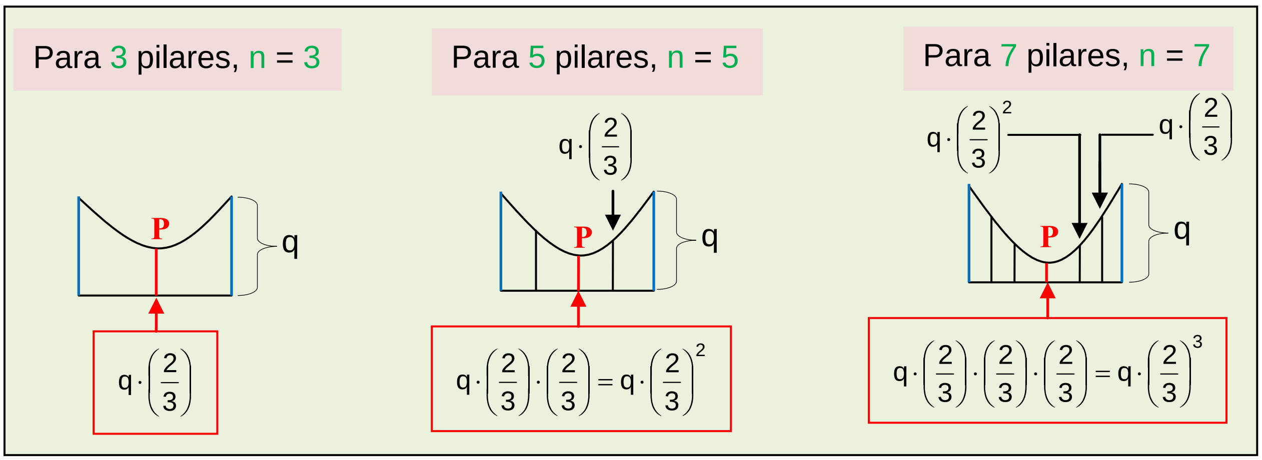
D) $q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

E) $q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}$

RESOLUCIÓN

Para encontrar la distancia a la que está la patinadora del suelo cuando esta se encuentra sobre el pilar P, se pueden representar las posibles superficies con sus pilares, construyendo una tabla para observar la regularidad que se produce al relacionar la altura del pilar mayor con la altura del pilar P, dada una cantidad n de pilares que sostienen la superficie, con n un número impar.

Para lo anterior, se puede considerar la siguiente representación, donde se muestra la altura del pilar P en función de la cantidad n de pilares:



Observando el esquema anterior, se puede construir la siguiente tabla:

Cantidad **n** de pilares	Altura del pilar P
3	$q \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1$
5	$q \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$
7	$q \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$
9	$q \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$
…	…
n	$q \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$

Ahora, para relacionar la cantidad de pilares n con el exponente k de la potencia que se observa en la tabla, se debe recordar que:

> un número impar positivo mayor que *1* se puede expresar como $2p + 1$, donde p es un número entero positivo.

De esta forma, se obtiene la siguiente relación entre el exponente de la potencia y la cantidad de n pilares (n un número impar).

Cantidad n de pilares	n = 2k + 1	Altura del pilar P
3	$3 = 2 \cdot 1 + 1$	$q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{1}$
5	$5 = 2 \cdot 2 + 1$	$q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2}$
7	$7 = 2 \cdot 3 + 1$	$q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$
9	$9 = 2 \cdot 4 + 1$	$q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$
……	…	…
n	$n = 2 \cdot k + 1$	$q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k}$

k es la cantidad de pilares que hay a cada lado del pilar *P*

Es así, que para determinar la expresión que relaciona la altura del pilar P dada la cantidad de n pilares, basta despejar k en la expresión n = 2k + 1, tal como se muestra a continuación:

$$2k + 1 = n$$

Sumando -1 en ambos lados de la igualdad

$$2k = n - 1$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ en ambos lados de la igualdad

$$k = \frac{n-1}{2}$$

Al reemplazar k por $\frac{n-1}{2}$ en $q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k}$ se obtiene $q \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$, expresión que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Número

Área Temática: Número

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.

Contenido: Resolución de problemas que involucran potencias

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: A

PREGUNTA 9

Para p y q números enteros, se puede determinar que la solución de la ecuación $px + qx = c$, en x, es un número entero positivo, si se sabe que:

(1) p y q dividen a c.

(2) $(p + q) \cdot c > 0$

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

En este ítem se debe determinar si con las informaciones dadas en (1) y/o en (2) la ecuación px + qx = c, en x, tiene como solución un número entero positivo.

Una forma de resolver este ítem es despejar x en dicha ecuación, realizando el siguiente desarrollo:

$$px + qx = c$$

Aplicando la factorización *am* + *an* = *a(m* + *n)*

$$x(p + q) = c$$

Multiplicando por $\frac{1}{p+q}$ en ambos lados de la igualdad

$$x = \frac{c}{p + q}$$

Recuerde que:

la fracción $\frac{m}{n}$ es un número entero positivo si *n* es divisor de *m*, y $m > 0$ y $n > 0$ ó $m < 0$ y $n < 0$.

En (1) se plantea que p y q dividen a c. Esta información no es suficiente para determinar que la solución x de la ecuación es un número entero positivo, ya que por ejemplo, para c = 4, p puede ser 1, (ya que 1 divide a 4) y q puede ser 2 (ya que 2 divide a 4), luego se tiene que $\frac{c}{p+q} = \frac{4}{1+2} = \frac{4}{3}$, valor que no es entero.

En (2) se tiene que (p + q) · c > 0, al igual que en el ejemplo anterior, se pueden tomar los valores c = 4, p = 1 y q = 2, ya que (1 + 2) · 4 > 0, luego el resultado de la ecuación es un número positivo no entero.

Ahora, si se juntan ambas informaciones, se pueden considerar los valores c = 4, p = 1 y q = 2, que cumplen con ambas condiciones y el resultado no es un número entero positivo.

De lo anterior, se concluye que se requiere información adicional para determinar que la solución de la ecuación es un número entero positivo, siendo E) la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números racionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números enteros y caracterizarlos como aquellos que pueden expresarse como un cuociente de dos números enteros con divisor distinto de cero

Contenido: Identificación de situaciones que muestran la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros al conjunto de los números racionales

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: E

PREGUNTA 10

¿Cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2} < \frac{\sqrt{6}}{2}$

C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} > \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{5}+1}{2} > \sqrt{3} + \sqrt{2}$

E) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe determinar cuál de las relaciones presentadas en las opciones es verdadera.

La igualdad en A) es falsa, como se muestra a continuación:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = 2(3-2)$$

$$\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = 2$$

Multiplicando por $2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ en ambos lados de la igualdad y aplicando $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Para verificar que la igualdad anterior no es verdadera, se tiene:

- $\left(\sqrt{5}-1\right)$ es un número mayor que 1, porque $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$
- $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ es un número mayor que 2, porque $\sqrt{3} > 1$ y $\sqrt{2} > 1$

Luego, se concluye que $\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) > 2$.

Al desarrollar la desigualdad en B) se tiene:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Multiplicando por 2 en ambos lados de la desigualdad y simplificando

$$\sqrt{5}+1 < \sqrt{6}$$

Elevando al cuadrado en ambos lados de la desigualdad, desarrollando $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y aplicando $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, con $a > 0$

$$5 + 2\sqrt{5} + 1 < 6$$

$$6 + 2\sqrt{5} < 6$$

Lo que es falso, pues la cantidad de la izquierda de la desigualdad es mayor que la cantidad de la derecha.

Ahora, al desarrollar la desigualdad en C) se tiene que:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} > \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

Multiplicando por 2 en ambos lados de la desigualdad y simplificando

$$\sqrt{5}-1 > \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Sumando 1 y $\sqrt{2}$ en ambos lados de la desigualdad

$$\sqrt{5}+\sqrt{2} > \sqrt{3}+1$$

Como $\sqrt{5} > \sqrt{3}$ y $\sqrt{2} > 1$, se tiene que la desigualdad $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} > \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ es verdadera.

Ahora, la desigualdad en D) no es verdadera. Una forma de verificarlo es la siguiente:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} > \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Multiplicando por *2* en ambos lados de la desigualdad

$$\sqrt{5}+1 > 2\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$$

Aplicando *a(b + c) = ab + ac*

$$\sqrt{5}+1 > 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

Aplicando $p\sqrt{b} = \sqrt{p^2 b}$, con *p* un número positivo

$$\sqrt{5}+1 > \sqrt{12} + \sqrt{8}$$

Como $\sqrt{5} < \sqrt{12}$ y $1 < \sqrt{8}$, se tiene que $\sqrt{5}+1 < \sqrt{12} + \sqrt{8}$, luego la desigualdad $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} > \sqrt{3} + \sqrt{2}$ es falsa.

Por último, la desigualdad dada en la opción E) tampoco es verdadera y una forma de verificarlo es la siguiente:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Multiplicando por $2\sqrt{2}$ en ambos lados de la desigualdad y simplificando

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right) > 2\sqrt{3}$$

Elevando al cuadrado en ambos lados de la desigualdad

$$2\left(5 - 2\sqrt{5} + 1\right) > 12$$

Sumando los valores obtenidos

$$2\left(6 - 2\sqrt{5}\right) > 12$$

Aplicando *a(b + c) = ab + ac*

$$12 - 4\sqrt{5} > 12$$

Lo cual es una contradicción, pues el número de la izquierda de la desigualdad es menor que el número de la derecha.

Por el análisis anterior, la opción C) es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Utilizar los números reales en la resolución de problemas, ubicarlos en la recta numérica, demostrar alguna de sus propiedades y realizar aproximaciones.

Contenido: Orden de raíces

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: C

PREGUNTA 11

¿Cuál de los siguientes números es un número irracional?

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

B) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

C) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)^2$

D) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4+\sqrt{12}}$

E) Ninguno de los anteriores

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe determinar cuál de los valores presentados en las opciones es un número irracional.

Recuerde que:

un **número irracional** es un número que no puede ser expresado como una fracción $\frac{m}{n}$, donde m y n son números enteros y $n \neq 0$.

Una forma de resolverlo es la siguiente:

Aplicando $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$, para $m \geq 0$ y $n > 0$

En A) se tiene que $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3}{12}}$

Simplificando por 3

$= \sqrt{\frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{2}$ valor que no es un número irracional.

Aplicando $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

En B) se tiene que $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2$

Aplicando $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, con $a > 0$

$= 3 - 2$

$= 1$ valor que no es un número irracional.

Aplicando $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

En C) se tiene que $\left(\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{18} + 18$

Aplicando $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, con a y b números positivos

$= 20 + 2\sqrt{36}$

$= 20 + 2\cdot 6$

$= 32$ valor que no es un número irracional.

Aplicando $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, con a y b números positivos

En D) se tiene que $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4+\sqrt{12}} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4+\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$$

Aplicando $ax + bx = x(a + b)$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}$$

Simplificando por $(2 + \sqrt{3}\,)$

$$= \frac{1}{2}$$

Valor que no es un número irracional.

Como ninguno de los números anteriores es irracional, entonces la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números irracionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números racionales, y los números reales como aquellos que corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.

Contenido: Números irracionales

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 12

Sea P = 4,24264068 una aproximación de $\sqrt{18}$. Si L es el redondeo a la milésima de P y M es el redondeo a la diez milésima de P, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

A) $L - M < 0$

B) $3 < (L - M) \cdot 10^4 < 5$

C) $M = L + 10^{-4}$

D) $(L - M) \cdot 10^3 = 3$

E) Ninguna de las anteriores

RESOLUCIÓN

Una forma de resolver este ítem es encontrar el valor de L y de M para luego determinar cuál de las relaciones presentadas en las opciones es verdadera.

Recuerde que:
para aproximar por redondeo un número a un cierto dígito decimal hay que fijarse en el valor del dígito siguiente. Si es mayor o igual a *5*, se suma *1* al dígito a redondear, de lo contrario, el dígito se mantiene igual.

En el enunciado se dice que P = 4,24264068 es una aproximación de $\sqrt{18}$ y L es el redondeo a la milésima de P, esto es,

P = 4,24264068, luego L = 4,243

Dígito de la milésima → Como el dígito que sigue a *2* es mayor que *5* (*6*) al dígito *2* se le debe sumar *1*.

Por otra parte, M es el redondeo a la diezmilésima de P, así

P = 4,24264068, luego M = 4,2426

Dígito de la diezmilésima → Como el dígito que sigue a *6* es menor que *5* (*4*) el dígito *6* se mantiene.

Ahora, en A) se tiene que L – M < 0, relación que es falsa, porque al reemplazar los valores de M y L se obtiene que 4,2430 – 4,2426 = 0,0004 > 0.

En B) se tiene $3 < (L - M)\cdot 10^4 < 5$, relación que es verdadera, porque L – M = 0,0004, luego $0{,}0004\cdot 10^4 = 4$, por lo que cumple la relación 3 < 4 < 5.

En C) se tiene que $M = L + 10^{-4}$, al reemplazar los valores de M y L se tiene M = 4,2426 y $L + 10^{-4} = 4{,}2430 + 0{,}0001 = 4{,}2431$, pero $4{,}2426 \neq 4{,}2431$, por lo que la igualdad en C) es falsa.

En D), la igualdad $(L - M)\cdot 10^3 = 3$ también es falsa, puesto que:

$$(L - M)\cdot 10^3 = (0{,}0004)\cdot 10^3 = 0{,}4 \neq 3$$

De lo anterior, la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números irracionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números racionales, y los números reales como aquellos que corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.

Contenido: Aproximación de un número irracional por redondeo

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 13

Si log 2 = m, log 3 = n y log 5 = p, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a $\log\left(\dfrac{36}{\sqrt{5}}\right)$?

A) $2m + 2n - \dfrac{p}{2}$

B) $\dfrac{m^2 + n^2}{\sqrt{p}}$

C) $\dfrac{2mn}{\frac{p}{2}}$

D) $m^2 + n^2 - \sqrt{p}$

E) $\dfrac{2m + 2n}{\frac{p}{2}}$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se puede utilizar las propiedades de los logaritmos como se muestra en el siguiente desarrollo:

Aplicando $\log\left(\dfrac{r}{q}\right) = \log r - \log q$, con $r > 0$ y $q > 0$

$$\log\left(\frac{36}{\sqrt{5}}\right) = \log 36 - \log\sqrt{5}$$

Aplicando $a \cdot a = a^2$ y $\sqrt[t]{q^r} = q^{\frac{r}{t}}$, con $q > 0$

$$= \log(2\cdot3)^2 - \log 5^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando $\log h^q = q \cdot \log h$, con $h > 0$

$$= 2\cdot\log(2\cdot3) - \frac{1}{2}\cdot\log 5$$

Aplicando $\log(h \cdot q) = \log h + \log q$, con $h > 0$ y $q > 0$

$$= 2(\log 2 + \log 3) - \frac{1}{2}\cdot\log 5$$

Reemplazando $\log 2 = m$, $\log 3 = n$ y $\log 5 = p$

$$= 2(m + n) - \frac{1}{2}\cdot p$$

$$= 2m + 2n - \frac{p}{2}$$

De lo anterior, se tiene que esta expresión se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.

Contenido: Propiedades de los logaritmos

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 14

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $(ax)^2 + a = 0$, en x, con a un número real negativo distinto de –1?

A) 1 y –1

B) $\frac{1}{\sqrt{-a}}$ y $\frac{-1}{\sqrt{-a}}$

C) $\sqrt{-a}\,i$ y $-\sqrt{-a}\,i$

D) i y $-i$

E) $\sqrt{-a}$ y $-\sqrt{-a}$

RESOLUCIÓN

Para encontrar las soluciones de la ecuación dada en la pregunta se puede despejar x de la siguiente manera:

$$(ax)^2 + a = 0$$

Sumando $-a$ en ambos lados de la igualdad

$$(ax)^2 = -a$$

Aplicando $(pq)^m = p^m q^m$

$$a^2x^2 = -a$$

Multiplicando por $\frac{1}{a^2}$ en ambos lados de la igualdad

$$x^2 = \frac{-a}{a^2}$$

Simplificando por a y aplicando $\frac{-1}{m} = \frac{1}{-m}$

$$x^2 = \frac{1}{-a}$$

Aplicando $\sqrt{\ }$ en ambos lados de la igualdad

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{-a}}$$

Aplicando $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{-a}}$$

Luego, las soluciones de la ecuación son $x = \frac{1}{\sqrt{-a}}$ y $x = \frac{-1}{\sqrt{-a}}$, con a un número real negativo distinto de –1.

De lo anterior se tiene que B) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números complejos constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números reales, y reconocer su relación con los números naturales, números enteros, números racionales y números reales.

Contenido: Números complejos

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: B

PREGUNTA 15

Sean los números complejos (a + bi), (c + di) y (a + di), con a, b, c y d números reales distintos de cero. ¿Cuál de las siguientes igualdades es **siempre** verdadera?

A) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

B) $(a + bi)(c + di) = ac + (bd)i$

C) $\dfrac{a + bi}{a + di} = \dfrac{b}{d}$

D) $\dfrac{a + bi}{a - bi} = -1$

E) $(a + bi)^2 = a^2 + (bi)^2$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe determinar cuál de las igualdades en las opciones es siempre verdadera.

En A) se puede realizar el siguiente procedimiento:

Aplicando $(m + ni) + (p + qi) = (m + p) + (n + q)i$

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Por lo que la igualdad en A) es siempre verdadera.

Ahora en B) se tiene:

Aplicando $(m + ni)(p + qi) = (mp - nq) + (mq + np)i$

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \neq ac + (bd)i$

Por su parte, en C) se tiene que considerar que para dividir dos números complejos se debe amplificar por el conjugado del divisor, es decir, $\dfrac{m + ni}{p + qi} = \dfrac{m + ni}{p + qi} \cdot \dfrac{p - qi}{p - qi}$.

Así, $\dfrac{a + bi}{a + di} = \dfrac{a + bi}{a + di} \cdot \dfrac{a - di}{a - di} = \dfrac{a^2 + bd - (ad - ab)i}{a^2 + d^2}$

Expresión que al ser valorada no es siempre igual al valor de $\dfrac{b}{d}$.

En D) se tiene $\dfrac{a + bi}{a - bi} = \dfrac{a + bi}{a - bi} \cdot \dfrac{a + bi}{a + bi} = \dfrac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2} \neq -1$

Por último, en E) se tiene

Aplicando $(m + ni)^2 = (m^2 - n^2) + (2mn)i$

$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

Expresión que al ser valorada no es siempre igual al valor de $a^2 + (bi)^2$.

Del desarrollo anterior, A) es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Operaciones con números complejos

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: A

PREGUNTA 16

¿Cuál de los siguientes números es igual al número complejo $\dfrac{i^{24}(3-2i)}{i^{17}(3-4i)}$?

A) $\dfrac{6}{25}+\dfrac{17}{25}i$

B) $\dfrac{6}{25}-\dfrac{17}{25}i$

C) $-\dfrac{8}{25}-\dfrac{9}{25}i$

D) $-\dfrac{17}{25}+\dfrac{6}{25}i$

E) $-\dfrac{6}{25}-\dfrac{17}{25}i$

RESOLUCIÓN

Para resolver la pregunta se puede operar con potencias de **i**, para luego dividir los números complejos.

Recuerde que:
si $m = 4k$, con k un número entero positivo, entonces el número complejo $i^m = 1$

Aplicando $p^{(m+n)} = p^m \cdot p^n$

$$\frac{i^{24}(3-2i)}{i^{17}(3-4i)} = \frac{i^{24}(3-2i)}{i^{16}\cdot i(3-4i)}$$

Como $24 = 6 \cdot 4$ y $16 = 4 \cdot 4$, se aplica $i^m = 1$, con $m = 4k$ y $k > 0$

$$= \frac{(3-2i)}{i(3-4i)}$$

Aplicando $m(n+p) = mn + mp$

$$= \frac{3-2i}{3i-4i^2}$$

Aplicando $i^2 = -1$

$$= \frac{3-2i}{4+3i}$$

Multiplicando por $(4-3i)$ en el numerador y en el denominador

$$= \frac{(3-2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$$

Multiplicando números complejos

$$= \frac{6-17i}{25}$$

$$= \frac{6}{25}-\frac{17}{25}i$$

Número complejo que se encuentra en B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Operaciones con números complejos

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 17

Sea n un número entero positivo mayor que 64, se puede determinar el valor del número complejo $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{n-1} + i^n$, si:

(1) n es un número par.

(2) Se conoce el resto al dividir n por 64.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta al ítem se debe analizar la información dada en el enunciado y verificar si con la información de (1) y/o (2) se puede determinar el valor del número complejo $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{n-1} + i^n$.

Para ello,

> **Recuerde que**:
> $i^0 = 1 \qquad i^4 = 1$
> $i^1 = i \qquad i^5 = i$
> $i^2 = -1 \qquad i^6 = -1$
> $i^3 = -i \qquad i^7 = -i$
> Así,
> $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$ y $i^{4k+3} = -i$, con k un número entero mayor o igual a cero

Luego, al operar las potencias de i del número complejo del enunciado y sabiendo que **n** es un número entero mayor que 64, se tiene:

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + \ldots + i^{64} + i^{65} + \ldots$$

Aplicando potencias de *i*

$$1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 + \ldots + 1 + i^{65} + \ldots$$

Reduciendo términos semejantes

$$\underbrace{\cancel{1} + \cancel{i} - \cancel{1} - \cancel{i}}_{0} + \underbrace{\cancel{1} + \cancel{i} - \cancel{1} - \cancel{i}}_{0} + 1 + \ldots + \underbrace{i^{62} + i^{63}}_{0} + i^{64} + i^{65} + \ldots$$

Ahora, en (1) se indica que **n** es un número par, entonces **n** puede tomar números pares mayores a 64.

Por ejemplo:

Si **n** = 66, se tiene $i^{64} + i^{65} + i^{66} = 1 + i - 1 = i$

Si **n** = 68, se tiene $i^{64} + i^{65} + i^{66} + i^{67} + i^{68} = 1 + i - 1 - i + 1 = 1$

Por lo que con la afirmación dada en (1) no se puede determinar un valor único para el número complejo del enunciado.

Por otro lado, en (2) se señala que se conoce el resto al dividir **n** por 64.

> **Recuerde que**:
> dividendo = divisor · cuociente + resto

Para determinar el valor numérico de $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{n-1} + i^{n}$, basta determinar el valor de **n**.

Así,

$$
\begin{aligned}
i^{n} &= i^{4(16\cdot\text{cuociente}) + \text{resto}} \\
&= i^{4(16\cdot\text{cuociente})} \cdot i^{\text{resto}} \\
&= 1 \cdot i^{\text{resto}} \\
&= i^{\text{resto}}
\end{aligned}
$$

Aplicando $a^{p+q} = a^{p} \cdot a^{q}$

Aplicando $i^{4k} = 1$, con k un número entero mayor o igual a cero

Como se conoce el resto, se conoce i^{n}, luego la opción B) es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Operación con números complejos

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: B

PREGUNTA 18

En un juego del casino, donde solo se gana o solo se pierde, Maximiliano apostó $(m - a)^3$ veces y ganó $(m + a)^3$ veces. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa **siempre** la cantidad de veces que perdió Maximiliano?

A) $-2a^3$

B) $-6ma$

C) $-6ma^2$

D) $-6m^2a - 2a^3$

E) $-8a^3$

RESOLUCIÓN

Para determinar la expresión que representa siempre la cantidad de veces que perdió Maximiliano, se debe restar a la expresión que representa las veces que apostó la cantidad de veces que ganó.

Aplicando $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(m - a)^3 - (m + a)^3 = m^3 - 3m^2a + 3ma^2 - a^3 - (m^3 + 3m^2a + 3ma^2 + a^3)$$

Aplicando $-(a + b) = -a - b$

$$= m^3 - 3m^2a + 3ma^2 - a^3 - m^3 - 3m^2a - 3ma^2 - a^3$$

$$= -6m^2a - 2a^3$$

Reduciendo términos semejantes

Expresión que se encuentra en la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelo de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Transformación de expresiones algebraicas no fraccionarias en otras equivalentes

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 19

Por x tarros de pintura que se compran, se paga \$ p. Si todos los tarros tienen el mismo precio, ¿cuál de las siguientes expresiones representa cuánto se paga, en pesos, por comprar dos tarros menos de pintura?

A) $\frac{p}{x} - 2$

B) $\frac{p}{x - 2}$

C) $\frac{p - 2}{x}$

D) $px - 2$

E) $\frac{p(x - 2)}{x}$

RESOLUCIÓN

Para determinar la expresión que representa cuánto se paga por comprar dos tarros menos de pintura, se puede establecer una relación de proporcionalidad entre las variables, la que permite obtener una ecuación de primer grado.

> **Recuerde que**:
>
> dos variables x e y son directamente proporcionales si hay una constante k distinta de cero, tal que $\frac{y}{x} = k$.

Así, del enunciado del ítem se tiene que:

Total de tarros de pintura comprados: x
Total pagado por los x tarros: \$ p

Ahora, si se designa por M el valor a pagar por la compra de dos tarros menos de pintura (x – 2), se establece la siguiente proporcionalidad directa:

$$\left.\begin{aligned} \frac{M}{x-2} &= \frac{p}{x} \\ M &= \frac{p(x-2)}{x} \end{aligned}\right\}$$

Multiplicando por *(x – 2)* en ambos lados de la igualdad

Expresión que se encuentra en la opción E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables, diferenciar entre verificación y demostración de propiedades y analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos, para fundamentar opiniones y tomar decisiones.

Contenido: Resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 20

$$\frac{(a+b)(a^2-b^2)}{b-a} =$$

A) $a^2 + b^2$

B) $b^2 - a^2$

C) $(a + b)^2$

D) $\dfrac{a^3 - b^3}{b - a}$

E) $-(a + b)^2$

RESOLUCIÓN

Para determinar a qué expresión equivale $\dfrac{(a+b)(a^2-b^2)}{b-a}$ se puede realizar lo siguiente:

Aplicando $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$

$$\frac{(a+b)(a^2-b^2)}{b-a} = \frac{(a+b)(a+b)(a-b)}{b-a}$$

Reemplazando $(a - b)$ por $-(b - a)$

$$= \frac{-(a+b)(a+b)\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}}$$

Simplificando y aplicando $x \cdot x = x^2$

$$= -(a+b)^2$$

Expresión que se encuentra en la opción E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Interpretar la operatoria con expresiones algebraicas fraccionarias como un generalización de la operatoria con fracciones numéricas, establecer estrategias para operar con este tipo de expresiones y comprender que estas operaciones tienen sentido solo en aquellos casos en que estas están definidas.

Contenido: Simplificar fracciones algebraicas simples, con binomios tanto en el numerador como en el denominador

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: E

PREGUNTA 21

¿Cuál de los siguientes sistemas tiene una única solución?

A) $4x - 3y + 2 = 0$
$x - \frac{3}{4}y = -\frac{1}{2}$

B) $7x - y = 7$
$y - 7x = 32$

C) $x = 8$
$y - x = 0$

D) $2x - y = 6$
$-4x + 2y + 12 = 0$

E) $x - y = 10$
$\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y = 2$

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas dados en las opciones tiene una única solución, se consideran los coeficientes que acompañan a las variables.

Recuerde que:

el sistema $\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right|$, en x e y, tiene una única solución cuando $\dfrac{a}{d} \neq \dfrac{b}{e}$.

Los sistemas presentados en las opciones A), B), D) y E) no cumplen esta condición. A continuación, se realiza un desarrollo en cada sistema.

A)
$$\left.\begin{array}{r} 4x - 3y + 2 = 0 \\ x - \dfrac{3}{4}y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow a = 4 \ \text{ y } \ b = -3 \\ \longrightarrow d = 1 \ \text{ y } \ e = -\dfrac{3}{4} \end{array} \left.\right\} \ \dfrac{4}{1} = \dfrac{-3}{-\dfrac{3}{4}} \ \Rightarrow \ 4 = 4$$

B)
$$\left.\begin{array}{l} 7x - y = 7 \\ y - 7x = 32 \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow a = 7 \ \text{ y } \ b = -1 \\ \longrightarrow d = -7 \ \text{ y } \ e = 1 \end{array} \left.\right\} \ \dfrac{7}{-7} = \dfrac{-1}{1} \ \Rightarrow \ -1 = -1$$

D)
$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 6 \\ -4x + 2y + 12 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow a = 2 \ \text{ y } \ b = -1 \\ \longrightarrow d = -4 \ \text{ y } \ e = 2 \end{array} \left.\right\} \ \dfrac{2}{-4} = \dfrac{-1}{2} \ \Rightarrow \ -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$$

E)
$$\left.\begin{array}{r} x - y = 10 \\ \dfrac{1}{5}x - \dfrac{1}{5}y = 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow a = 1 \ \text{ y } \ b = -1 \\ \longrightarrow d = \dfrac{1}{5} \ \text{ y } \ e = -\dfrac{1}{5} \end{array} \left.\right\} \ \dfrac{1}{\dfrac{1}{5}} = \dfrac{-1}{-\dfrac{1}{5}} \ \Rightarrow \ 5 = 5$$

En cambio, la opción C) cumple con la condición, esto es

$$\left.\begin{array}{r} x = 8 \\ y - x = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \longrightarrow a = 1 \ \text{ y } \ b = 0 \\ \longrightarrow d = -1 \ \text{ y } \ e = 1 \end{array} \left.\right\} \ \dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{0}{1} \ \Rightarrow \ -1 \neq 0$$

De esta manera, la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Contenido: Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 22

Dos variables x y z dependen entre sí según la ecuación z = ax + c. La tabla adjunta muestra algunos de los valores de x y de z. ¿Cuáles son los valores de a y c, respectivamente?

x	z
1	4
2	6,5

A) 5 y $\frac{3}{2}$

B) $\frac{21}{2}$ y $-\frac{13}{2}$

C) $-\frac{2}{5}$ y $\frac{22}{5}$

D) $\frac{5}{2}$ y $\frac{3}{2}$

E) $\frac{2}{5}$ y $-\frac{3}{5}$

RESOLUCIÓN

Para determinar los valores de a y c se puede reemplazar los valores de x y z dados en la tabla en la ecuación z = ax + c y así formar un sistema de ecuaciones lineales en a y en c.

Reemplazando los valores de la tabla se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{array}{r} 4 = a + c \\ 6{,}5 = 2a + c \end{array}$$

Multiplicando la primera ecuación por -1 en ambos lados de la igualdad

$$\begin{array}{r} -4 = -a - c \\ 6{,}5 = 2a + c \end{array}$$

Sumando los elementos de la primera ecuación con los de la segunda ecuación y reduciendo términos semejantes

$$\boxed{2{,}5 = a}$$

Resultado que escrito como fracción es $\boxed{a = \frac{5}{2}}$

Luego, reemplazando este valor en la primera ecuación del sistema se tiene:

$$4 = \frac{5}{2} + c$$

Sumando $-\frac{5}{2}$ a ambos lados de la igualdad

$$\boxed{\frac{3}{2} = c}$$

Valores que se encuentran en la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Contenido: Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 23

Si el área de un rectángulo es 75 cm^2 y el ancho del rectángulo mide 10 cm menos que su largo, ¿cuál es la medida de su largo?

A) 5 cm

B) $\frac{55}{4}$ cm

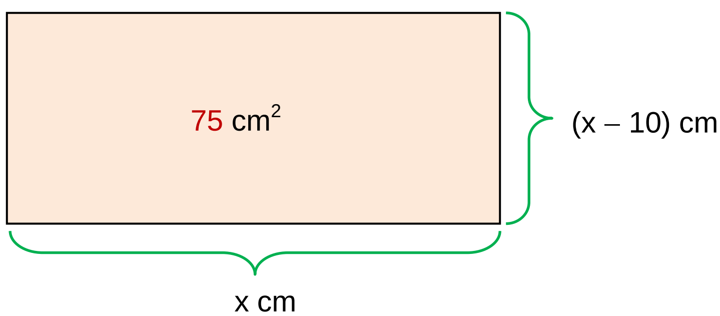
C) 15 cm

D) $\sqrt{85}$ cm

E) No existe un rectángulo con esas dimensiones.

RESOLUCIÓN

Una forma de responder la pregunta es representar las medidas del largo (x) y del ancho del rectángulo, para luego escribir una expresión que represente su área, como se muestra a continuación:



> **Recuerde que:**
> el área de un rectángulo de lados ***a*** unidades y ***b*** unidades es ***a·b*** unidades cuadradas.

Con esta información se puede formar la siguiente ecuación de segundo grado:

$$x(x - 10) = 75$$

Distribuyendo *x* en el binomio

$$x^2 - 10x = 75$$

Sumando -75 en ambos lados de la igualdad

$$x^2 - 10x - 75 = 0$$

Recuerde que:
la fórmula general para encontrar las **raíces o soluciones** de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en x, con a, b y c números reales y a distinto de cero, es $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

De esta manera, de la ecuación $x^2 - 10x - 75 = 0$ se tiene que $a = 1$, $b = -10$ y $c = -75$.

Luego, al reemplazar estos valores en la fórmula se obtiene:

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{100 + 300}}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{10 - \sqrt{100 + 300}}{2}$$

Así, las dos raíces de la ecuación cuadrática son $x_1 = 15$ y $x_2 = -5$, pero como la variable x representa la medida del largo del rectángulo, la solución válida es $x_1 = 15$ cm, valor que se encuentra en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.

Contenido: Resolución de problemas asociados a ecuaciones de segundo grado con una incógnita y la pertinencia de las soluciones

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: C

PREGUNTA 24

Dada la ecuación $x^2 + 6x + 17 = 0$, ¿qué número real m debe sumarse a ambos lados de la igualdad para completar el cuadrado de un binomio en el lado izquierdo de ella y cuáles son las soluciones reales de $x^2 + 6x + 17 = 0$?

A) $m = 9$ y las soluciones son $(-3 + \sqrt{6})$ y $(-3 - \sqrt{6})$.

B) $m = 19$ y las soluciones son $(6 + \sqrt{3})$ y $(6 - \sqrt{3})$.

C) $m = -8$ y las soluciones son $(-3 + \sqrt{8})$ y $(-3 - \sqrt{8})$.

D) $m = -1$ y no tiene soluciones reales.

E) $m = -8$ y no tiene soluciones reales.

RESOLUCIÓN

Para dar solución a la pregunta se tiene que determinar qué número real **m** se debe sumar a ambos lados de la igualdad para que la expresión $x^2 + 6x + 17$ sea el cuadrado de un binomio y luego, determinar las soluciones reales de la ecuación planteada en el enunciado.

Recuerde que:

$$(x + b)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot b + b^2$$

Así, al descomponer la ecuación del enunciado se tiene:

$$x^2 + 6x + 17 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 17 = 0$$

Sumando **m** en ambos lados de la igualdad, se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccccc} x^2 & + & 2 & \cdot & x & \cdot & 3 & + & \underbrace{17 + m} = m \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ x^2 & + & 2 & \cdot & x & \cdot & b & + & b^2 \end{array}$$

De la expresión anterior se tiene que $b = 3$, por lo que $17 + m = 9$, de donde $m = -8$.

Luego, $x^2 + 6x + 17 = x^2 + 6x + 9 + 8 = (x + 3)^2 + 8 = 0$

Ahora, para determinar las soluciones de la ecuación se despeja x en la igualdad como se muestra a continuación:

$$(x + 3)^2 + 8 = 0$$

Sumando -8 en ambos lados de la igualdad

$$(x + 3)^2 = -8$$

Aplicando $x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

$$x + 3 = \pm\sqrt{-8}$$

Sumando -3 en ambos lados de la igualdad

$$x = -3 \pm \sqrt{-8}$$

Como $\sqrt{-8}$ no es un número real, la ecuación dada no tiene soluciones en el conjunto de los números reales.

Por el desarrollo realizado se concluye que la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.

Contenido: Resolución de ecuaciones de segundo grado y determinación de su pertenencia al conjunto de los números reales o complejos

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 25

¿Cuál de los siguientes conjuntos es el conjunto solución del sistema $\left.\begin{array}{l} 5x + 3 < x \\ 4 - 3x > 12 \end{array}\right|$?

A) $\left]-\infty, -\dfrac{8}{3}\right[$

B) $\left]-\infty, -\dfrac{3}{4}\right[$

C) $\left]-\dfrac{8}{3}, -\dfrac{3}{4}\right[$

D) $\left]-\dfrac{8}{3}, \infty\right[$

E) IR

RESOLUCIÓN

Para encontrar el conjunto solución del sistema de inecuaciones planteado en la pregunta, se debe obtener el conjunto solución de cada inecuación, para luego intersectarlos.

Así, al resolver la primera inecuación del sistema se tiene:

$$5x + 3 < x$$

Sumando $-x$ y -3 en ambos lados de la desigualdad y reduciendo términos

$$4x < -3$$

Multiplicando por $\frac{1}{4}$ en ambos lados de la desigualdad

$$x < -\frac{3}{4}$$

Ahora, para resolver la segunda inecuación del sistema,

Recuerde que:
al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número real negativo, el sentido de la desigualdad se invierte. Por ejemplo, si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.

De esta manera, se tiene que:

$$4 - 3x > 12$$

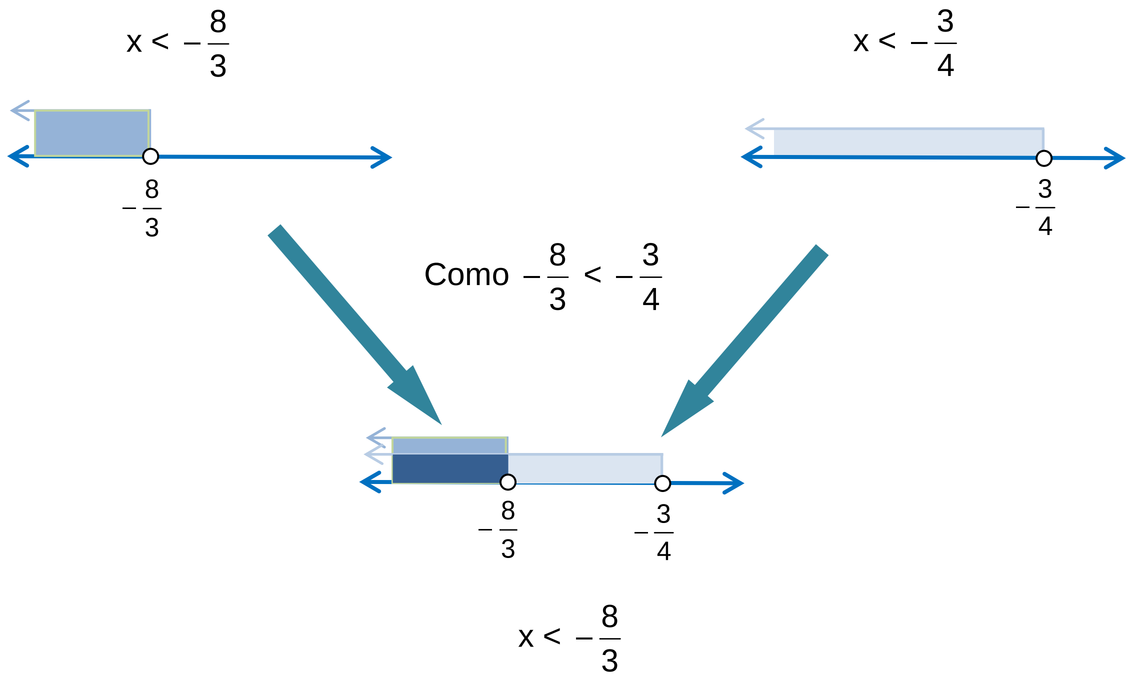
Sumando -4 en ambos lados de la

$$-3x > 8$$

Multiplicando por $-\frac{1}{3}$ en ambos lados de la desigualdad

$$x < -\frac{8}{3}$$

Por último, para determinar la intersección entre los conjuntos soluciones se representarán gráficamente estos conjuntos en la recta numérica, como se muestra a continuación:



Como el conjunto solución del sistema es la intersección de los conjuntos soluciones de las inecuaciones que lo componen, entonces la solución es $x < -\frac{8}{3}$, que al ser escrito como intervalo queda $\left]-\infty, -\frac{8}{3}\right[$, el cual se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones.

Contenido: Sistema de inecuaciones lineales con una incógnita

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 26

Si m y n son números reales positivos tal que m > n, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\dfrac{m+n}{m-n} > 1$

II) $-\dfrac{1}{m} < -\dfrac{1}{n}$

III) $\dfrac{1}{n-m} < 0$

A) Solo I

B) Solo III

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) Solo II y III

RESOLUCIÓN

En este ítem se analizará la veracidad de cada una de las relaciones dadas en I), en II) y en III). Teniendo en consideración que m y n son números reales positivos, tal que m > n, se cumple que:

- $m + n > 0$
- $m - n > 0$
- $m + n > m - n$

De esta manera, la relación dada en I) es verdadera, debido a que como el numerador y el denominador de $\dfrac{m+n}{m-n}$ son números positivos, y el numerador es mayor que el denominador, se tiene que $\dfrac{m+n}{m-n} > 1$.

Para determinar la veracidad de la relación dada en II),

Recuerde que:

- si $a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$

Como m > n se cumple que $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$, luego multiplicando por –1 en ambos lados de la desigualdad se tiene que $-\frac{1}{m} > -\frac{1}{n}$, por lo que la relación dada en II) es falsa.

Ahora, en III) se tiene la expresión $\frac{1}{n - m}$, donde el numerador es un número positivo y el denominador es un número negativo, pues m > n, con n y m números reales positivos.

Luego, dicha fracción es menor que cero, por lo que la relación dada en III) es verdadera.

Del análisis anterior, se tiene que las relaciones dadas en I) y en III) son verdaderas, por lo que la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones.

Contenido: Propiedades de las desigualdades

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: D

PREGUNTA 27

Se puede determinar el valor central de tres números impares consecutivos, si se sabe que la suma de ellos es:

(1) A lo más 75.

(2) A lo menos 63.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para determinar si con la información dada en (1) y/o en (2) se puede obtener el valor central de tres números impares consecutivos, se plantean inecuaciones lineales con una incógnita y se verifica si sus conjuntos solución o la intersección de ellos permite determinar el número pedido.

Para realizar lo antes descrito se debe tener presente que:

- un **número impar** se puede expresar de la forma $2n + 1$, con n un número entero.
- tres **números impares consecutivos** se pueden expresar de la forma $2n + 1$, $2n + 3$ y $2n + 5$, con n un número entero, donde la suma de estos es $6n + 9$.

En los números impares $2x + 1$, $2x + 3$ y $2x + 5$ el número central es $2x + 3$.

Ahora, en (1) se afirma que la suma de los tres números impares consecutivos es a lo más 75, lo cual se puede expresar a través de la inecuación $6x + 9 \leq 75$.

Al resolver esta inecuación se obtiene que $x \leq 11$, por lo tanto, existen infinitos valores para x que satisfacen dicha inecuación, lo que no permite encontrar un único valor para $2x + 3$.

Por otro lado, con la información dada en (2) se puede establecer la siguiente inecuación $6x + 9 \geq 63$.

De esta inecuación se obtiene que $x \geq 9$, por lo que existen infinitos valores para x que satisfacen dicha inecuación, lo que no permite encontrar un valor único para $2x + 3$.

Ahora, si se considera la información dada en (1) y en (2) se tiene que:

$x \leq 11$, es decir, $x \in \{\ldots, 9, 10, 11\}$ y $x \geq 9$, es decir, $x \in \{9, 10, 11, \ldots\}$

De lo anterior, se concluye que existe más de un valor para x (9, 10 y 11) que cumple estas condiciones, por lo que tampoco se puede determinar un valor único para 2x + 3.

Por lo tanto, se requiere información adicional para determinar el valor central de tres números impares consecutivos, lo que implica que la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones.

Contenido: Sistema de inecuaciones lineales con una incógnita

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: E

PREGUNTA 28

En un cuadrado, la mitad de la medida de la diagonal es p. ¿Cuál de las siguientes funciones describe el perímetro del cuadrado en función de p?

A) $f(p) = 4\sqrt{2}\,p$

B) $g(p) = 2\sqrt{2}\,p$

C) $h(p) = \sqrt{2}\,p$

D) $r(p) = 4p$

E) $q(p) = 2p$

RESOLUCIÓN

Para responder esta pregunta se debe considerar que si la mitad de la medida de la diagonal de un cuadrado es p, entonces la diagonal del cuadrado mide 2p.

> **Recuerde que:**
> la diagonal de un cuadrado de lado *m* unidades es $m\sqrt{2}$ unidades.

Si se designa por x la medida del lado del cuadrado y como su diagonal es 2p, entonces se tiene que:

$$x\sqrt{2} = 2p$$

Multiplicando por $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en ambos lados de la igualdad

$$x = \frac{2p}{\sqrt{2}}$$

Racionalizando

$$x = \sqrt{2}\,p$$

> **Recuerde que:**
> el perímetro de un cuadrado de lado *q* unidades es *4q* unidades.

De esta manera, la función que describe el perímetro del cuadrado de lado $\sqrt{2}\,p$ es $f(p) = 4\sqrt{2}\,p$, función que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Función lineal

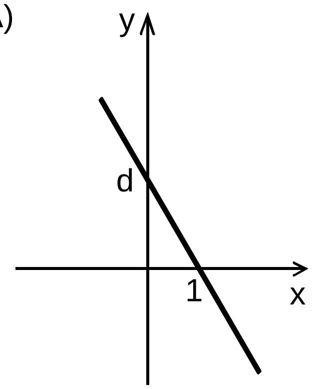
Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

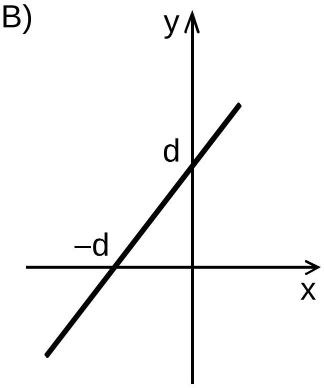
PREGUNTA 29

¿Cuál de los siguientes gráficos podría representar a la función f(x) = dx + d, con dominio el conjunto de los números reales, si d es un número real distinto de cero y de uno?

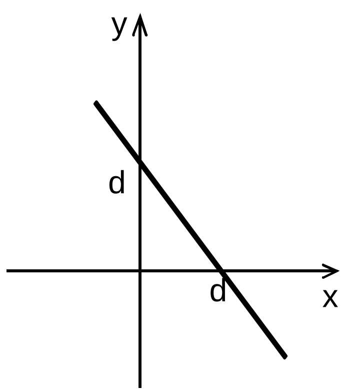
A)



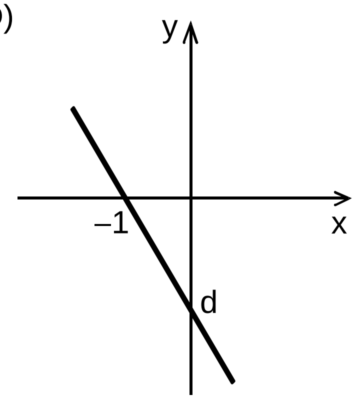
B)



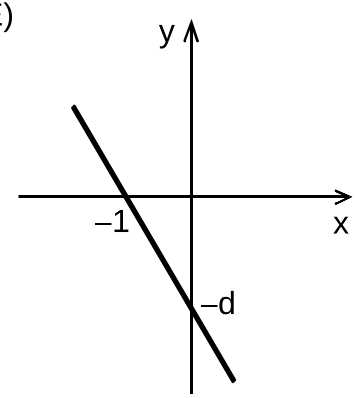
C)



D)



E)



RESOLUCIÓN

Una forma de determinar cuál de los gráficos de las opciones podría representar a la función f(x) = dx + d es determinar los puntos donde la gráfica de esta función intersecta a los ejes coordenados.

> **Recuerde que**:
> la gráfica de una **función afín** de la forma $g(x) = mx + n$ es una recta que intersecta al *eje x* en el punto $\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$ e intersecta al *eje y* en el punto $(0, n)$.

Así, como f(x) = dx + d, se tiene que la recta asociada a f intersecta al eje y en el punto (0, d) y al eje x en el punto $\left(-\frac{d}{d}, 0\right)$ = (–1, 0). La gráfica de la opción D) es la que cumple con estas condiciones.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Función afín

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: D

PREGUNTA 30

Sea la función $f(x) = \sqrt{x - h} + k$, con dominio el intervalo $[h, \infty[$. Si h y k son números reales, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) El recorrido de f es el intervalo $[h, \infty[$.

II) Si $k > 0$ y $h < 0$, entonces la gráfica de f se encuentra solo en el segundo cuadrante.

III) El mínimo valor que alcanza f es k.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) Solo I y III

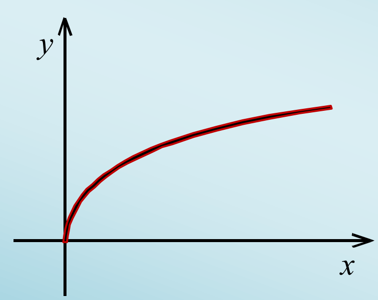
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) se pueden analizar las características de las posibles gráficas de la función $f(x) = \sqrt{x - h} + k$, con dominio el intervalo $[h, \infty[$.

Recuerde que:

el gráfico de la **función raíz cuadrada** de la forma $g(x) = \sqrt{x}$, con dominio el conjunto de los números reales mayores o igual que cero es el siguiente:

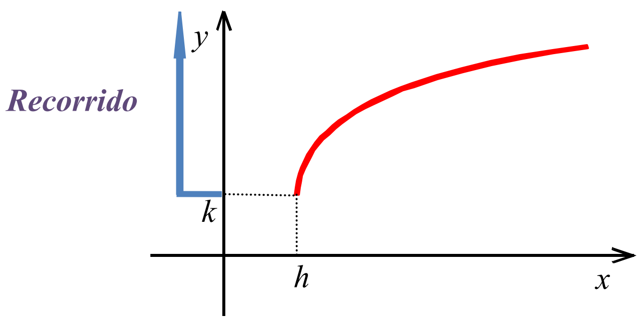


Al analizar la afirmación dada en I),

Recuerde que:
- la gráfica de la función $p(x) = f(x - n) + m$, con n y m números positivos, corresponde a la gráfica de la **función** $f(x)$ **trasladada** n unidades horizontalmente hacia la derecha y m unidades verticalmente hacia arriba.
- el **recorrido de una función** g es el conjunto formado por todas las imágenes de los elementos del dominio de g, es decir, son todos los valores $y = g(x)$, para todo $x \in dom\ g$.

Así, la gráfica de f corresponde a la gráfica trasladada de la función raíz cuadrada $g(x) = \sqrt{x}$, con dominio el intervalo $[0, \infty[$.

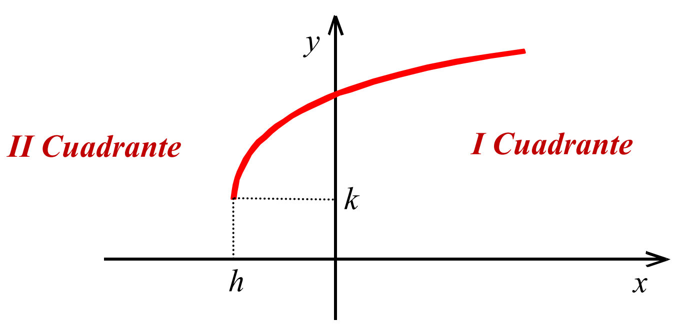
Por ejemplo, si se grafica la función f(x) = g(x – h) + k, con h > 0 y k > 0, se tiene la siguiente figura:



Luego, se observa que el recorrido de f es el intervalo $[k, \infty[$.

Por lo anterior, la afirmación en I) no es siempre verdadera.

Ahora, al graficar la función f, con k > 0 y h < 0, se tiene que la curva pasa por el primer y segundo cuadrante, tal como se muestra a continuación:



De esta manera, la afirmación dada en II) no es siempre verdadera.

Por último, para analizar la afirmación dada en III) se debe considerar que f(x) < f(x + 1). Como el dominio de f es $\left[h, \infty\right[$, el mínimo valor del recorrido se obtiene cuando x = h, es decir, f(h) = k. Por lo que la afirmación en III) es siempre verdadera.

Por el análisis anterior, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Utilizar las funciones exponencial, logarítmica y raíz cuadrada como modelos de situaciones o fenómenos en contextos significativos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Función raíz cuadrada

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: C

PREGUNTA 31

Si el eje y es el eje de simetría de una parábola asociada a una función cuadrática con dominio el conjunto de los números reales, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) El vértice de la parábola pertenece al eje y.

II) La recta que pasa por un punto de la parábola y por el vértice de ella tiene pendiente positiva.

III) Una recta paralela al eje de simetría de la parábola la intersecta en un solo punto.

A) Solo I

B) Solo III

C) Solo I y II

D) Solo I y III

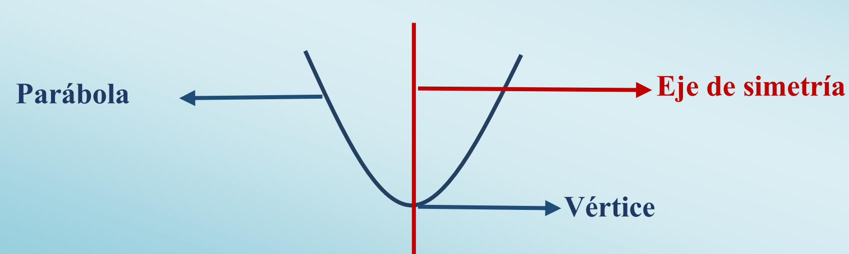
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta a la pregunta se debe determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III).

Para determinar si la afirmación en I) es verdadera,

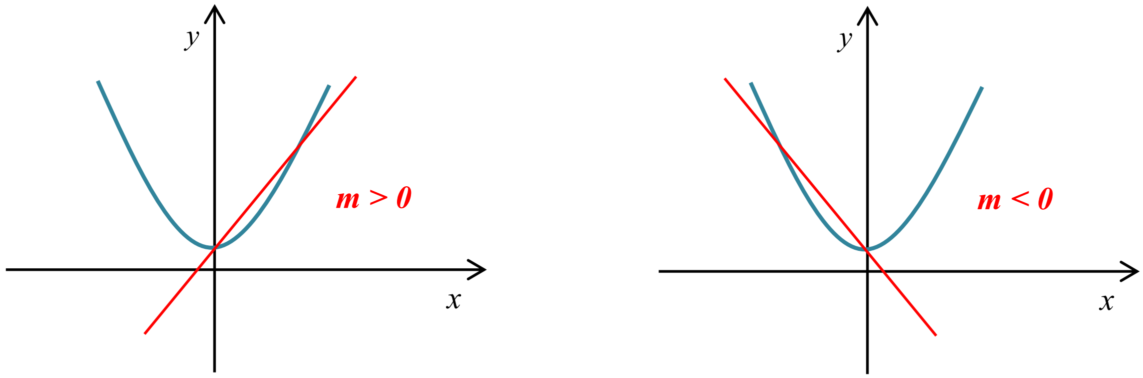
Recuerde que:
el **eje de simetría** de una parábola es una línea recta que pasa por su vértice y la divide en dos curvas simétricas, tal como se muestra a continuación:



Como en el enunciado se afirma que el eje y es eje de simetría de la parábola asociada a una función cuadrática, se tiene que su vértice pertenece al eje y.

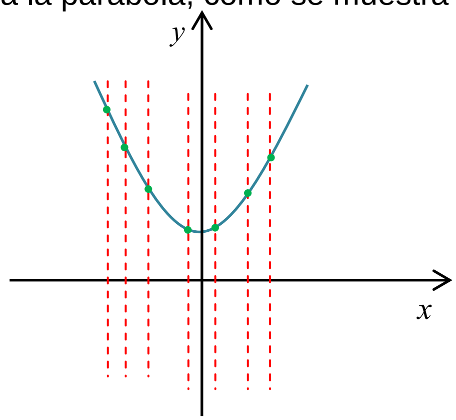
Luego, la afirmación en I) es siempre verdadera.

Ahora, en las siguientes figuras se representan dos situaciones, donde se muestra una recta que pasa por un punto de la parábola y por el vértice de ella, donde ***m*** es la pendiente de la recta respectiva:



Como se observa la recta puede tener pendiente positiva o negativa, según sea el caso, por lo que la afirmación en II) no es siempre verdadera.

Por otro lado, como la parábola está asociada a una función cuadrática, significa que cada elemento x de su dominio tiene una única imagen (y), lo que gráficamente se observa al trazar infinitas rectas paralelas al eje de simetría de la parábola, las cuales siempre intersectan en un solo punto a la parábola, como se muestra a continuación:



Luego, la afirmación en III) es siempre verdadera, lo que implica que la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.

Contenido: Representación gráfica de la función cuadrática

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: D

PREGUNTA 32

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s), con respecto a la función f definida por $f(x) = x^2 - 8$, para $x > \sqrt{8}$?

I) Modela el área de un rectángulo de lados $\left(x - \sqrt{8}\right)$ cm y $\left(x + \sqrt{8}\right)$ cm.

II) Modela el área de un cuadrado de lado $\left(x - \sqrt{8}\right)$ cm.

III) Modela el área que queda de restar el área de un cuadrado de lado $\sqrt{8}$ cm al área de un cuadrado mayor de lado x cm.

A) Solo II
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

En este ítem se debe determinar si las situaciones dadas en I), en II) y en III) se pueden modelar por la función $f(x) = x^2 - 8$, para $x > \sqrt{8}$.

En I), si se asigna como g a la función que modela el área de un rectángulo de lados $\left(x - \sqrt{8}\right)$ cm y $\left(x + \sqrt{8}\right)$ cm, se tiene que:

$$g(x) = \left(x - \sqrt{8}\right)\left(x + \sqrt{8}\right)$$

Aplicando $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$$g(x) = x^2 - \left(\sqrt{8}\right)^2$$

Aplicando $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, con $a > 0$

$$g(x) = x^2 - 8$$

Luego, g(x) = f(x), por lo que la afirmación en I) es verdadera.

Ahora, en II) si se asigna por h a la función que modela el área de un cuadrado de lado $\left(x - \sqrt{8}\right)$ cm, se tiene que:

$$h(x) = \left(x - \sqrt{8}\right)^2$$

Aplicando $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$h(x) = x^2 - 2\sqrt{8}\,x + \left(\sqrt{8}\right)^2$$

Aplicando $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, con $a > 0$

$$h(x) = x^2 - 2\sqrt{8}\,x + 8$$

Por lo tanto, h(x) $\neq$ f(x), luego la afirmación dada en II) no es verdadera.

Por último, en III) si se asigna por p a la función que modela el área que queda de restar el área de un cuadrado de lado $\sqrt{8}$ cm al área de un cuadrado mayor de lado x cm, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= x^2 - \left(\sqrt{8}\right)^2 \\ p(x) &= x^2 - 8 \end{aligned}\right\} \quad \text{Aplicando } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \text{ con } a > 0$$

Luego, p(x) = f(x), por lo que la afirmación dada en III) es verdadera.

Por el desarrollo anterior, se tiene que la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.

Contenido: Modelamiento de situaciones asociadas a funciones cuadráticas

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 33

Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$ y con dominio el conjunto de los números reales. Si la gráfica de f no intersecta al eje x, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) $a > 0$

B) $c > 0$

C) $b > 0$

D) $b^2 - 4ac < 0$

E) La recta de ecuación y = c es tangente a la gráfica de f.

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de las afirmaciones dadas en las opciones es **siempre** verdadera, recuerde que:

dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, se tiene que:

- si $a > 0$, la concavidad de la **parábola** asociada a f abre hacia arriba y si $a < 0$, la concavidad de la **parábola** abre hacia abajo.
- la **parábola** asociada a f **intersecta al eje de las ordenadas** en $(0, c)$.

Así, en A) se indica que $a > 0$, lo cual no se puede determinar si es verdadero, pues solo se dice en el enunciado que $a \neq 0$, lo que implica que puede ser cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Tampoco se puede deducir que la relación en B) es verdadera, pues en el enunciado no se dan datos del signo de **c**, por lo que puede ser positivo o negativo, además, solo se dice que no intersecta al eje de las abscisas, pero no se indica donde la gráfica intersecta al eje de las ordenadas.

Lo mismo se concluye de la relación dada en C), o sea, del enunciado no se desprende algún dato que permita concluir que $b > 0$.

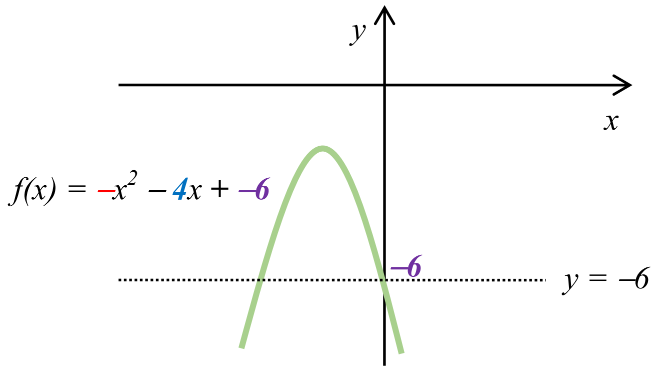
Para determinar en D) si $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$ es verdadero, se debe recordar lo que significa que la gráfica de f no intersecte al eje x, información dada en el enunciado:

para que la **gráfica de una función cuadrática** de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ no intersecte el *eje x*, se debe cumplir que $b^2 - 4ac < 0$.

Luego, se concluye que la relación $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$ es siempre verdadera.

Ahora, en E) se señala que la recta de ecuación **y** = **c** es tangente a la gráfica de f, esta afirmación es falsa, porque la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ dada en el enunciado, intersecta al eje y en (0, **c**) y no necesariamente es tangente a la recta **y** = **c**.

El siguiente gráfico ejemplifica lo anterior, con **c = –6**:



Por el desarrollo anterior la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.

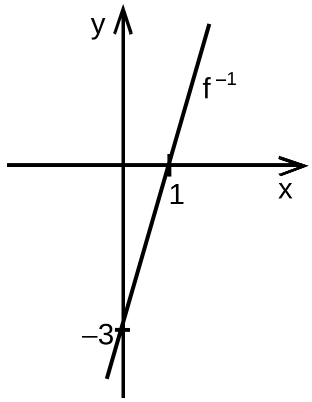
Contenido: Condiciones de la función cuadrática para que su gráfica intersecte el eje x y variaciones de la gráfica a partir de la modificación de los parámetros

Habilidad Cognitiva: Comprender

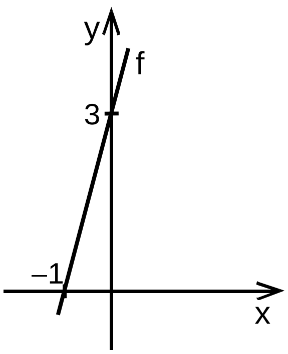
Clave: D

PREGUNTA 34

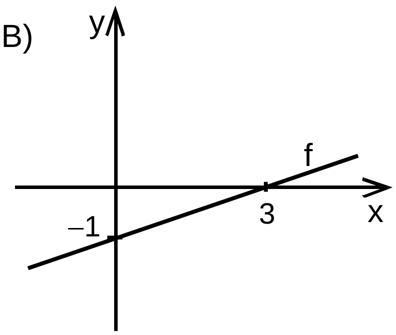
Sea f^{-1} la función inversa de f. Si en la figura adjunta se representa la gráfica de la función f^{-1}, ¿cuál de los gráficos presentados en las opciones representa la gráfica de f ?



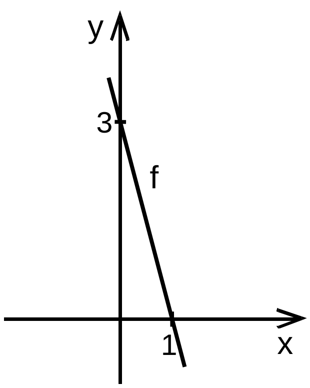
A)



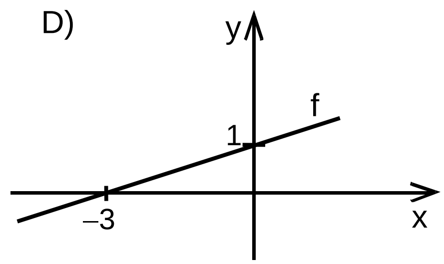
B)



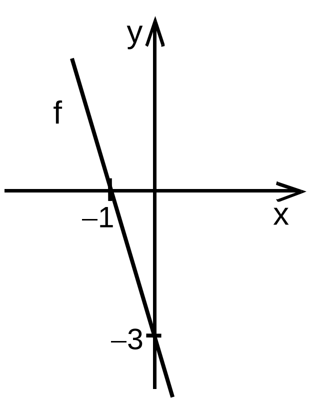
C)



D)



E)



RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe determinar en cuál de las opciones está graficada la función f a partir de la gráfica de f^{-1}. Para ello,

Recuerde que:
se llama función inversa o recíproca de una función f a una nueva función cuyo dominio es el conjunto de las imágenes de la función inicial y sus imágenes conforman el dominio de la función inicial, es decir, si la función f^{-1} es la función inversa de f y $f(b) = a$, entonces $f^{-1}(a) = b$. Gráficamente, si el punto (b, a) pertenece a la gráfica de f, entonces (a, b) pertenece a la gráfica de f^{-1}.

Por lo anterior, del gráfico de la función inversa dada en el enunciado se tiene la siguiente tabla:

x	$f^{-1}(x)$
1	0
0	–3

Ahora, para encontrar cuál de los gráficos de las opciones corresponde a f se debe cumplir lo siguiente:

x	f(x)
0	1
–3	0

Es decir, la gráfica de f debe pasar por los puntos (–3, 0) y (0, 1), lo cual solo ocurre en el gráfico de la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Analizar las condiciones para la existencia de la función inversa.

Contenido: Función inversa

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: D

PREGUNTA 35

Si $ 133.100 es el capital final al invertir un cierto monto (x), durante 36 meses, con una tasa de interés de tal manera que el capital cada año aumenta en un 10% respecto del año anterior, sin haber realizado depósitos ni retiros en ese periodo, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar el valor de x, en pesos?

A) $133.100 = x(1 + 0{,}36)^{10}$

B) $x(1 + 0{,}1 \cdot 3) = 133.100$

C) $133.100 = x(1 + 0{,}1)^3$

D) $x = 133.100(1 + 10)^3$

E) $x(1 + 0{,}1 \cdot 36) = 133.100$

RESOLUCIÓN

La pregunta se refiere al planteo de un problema de cálculo de interés compuesto, ya que el capital cada año aumenta en un porcentaje respecto del año anterior.

Recuerde que:

la fórmula para el cálculo del interés compuesto es:

$$C_f = C_i(1 + t)^n$$

donde

C_f = capital final
C_i = capital inicial
t = tasa de interés
n = periodos

Del enunciado se tiene que el capital final al invertir cierto monto (x) es $ 133.100, además, la tasa de interés es de un 0,1 (10%) y el periodo es 3 años (36 meses), reemplazando en la fórmula estos valores se tiene:

C_f = $ 133.100
C_i = x
t = 0,1
n = 3 años

$C_f = C_i(1 + t)^n \longrightarrow 133.100 = x(1 + 0{,}1)^3$, ecuación que se encuentra en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia, inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.

Contenido: Interés compuesto

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: C

PREGUNTA 36

Se puede determinar el valor numérico de la abscisa del vértice de la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, si se conoce:

(1) El valor numérico de c.

(2) Los valores numéricos de los ceros de la función asociados a dicha parábola.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

En este ítem se debe determinar si con las condiciones dadas en (1) y/o en (2) se puede determinar el valor numérico de la abscisa del vértice de la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

Recuerde que:
dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$, donde x_1 y x_2 son los ceros de la función, se tiene que el valor de la abscisa del vértice de la parábola asociada a f es $\frac{-b}{2a}$ que es igual a $\frac{x_1 + x_2}{2}$.

La información dada en (1) no es suficiente para determinar el valor numérico de la abscisa del vértice de la parábola, ya que al reemplazar c, conocido, en la ecuación dada en el enunciado no se pueden conocer los valores de a y b.

Ahora, con la información dada en (2) se conocen los ceros de la función, luego el valor de la abscisa del vértice se puede determinar como el promedio de estos.

Por el análisis anterior, la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.

Contenido: Función cuadrática

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: B

PREGUNTA 37

Sean los vectores $\vec{v}(7, -5)$ y $\vec{m} = \vec{v} - \vec{u}$, tal que $\vec{m}$ está en el segundo cuadrante. ¿Cuál de los siguientes vectores podría ser $\vec{u}$?

A) (–6, 8)
B) (8, 6)
C) (–8, 6)
D) (8, –6)
E) (–8, –6)

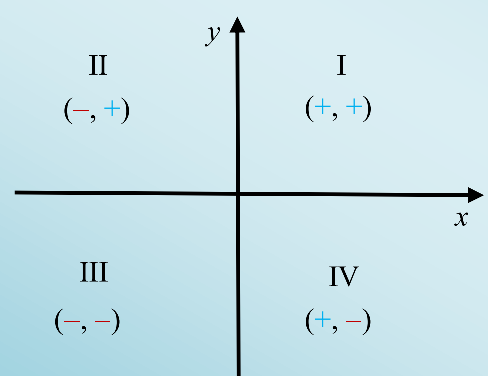
RESOLUCIÓN

Para dar la respuesta a esta pregunta se debe recordar que en este modelo y en la PSU® se considera que $\vec{v}(a, b)$ es un vector que tiene su punto de inicio en el origen del plano cartesiano y su extremo en el punto (a, b).

Además,

Recuerde que:
el plano cartesiano está dividido en cuatro cuadrantes, estos son:
- I cuadrante: compuesto por los puntos cuyas coordenadas son positivas, es decir, (+, +).
- II cuadrante: compuesto por los puntos cuya abscisa es negativa y su ordenada es positiva, es decir, (–, +).
- III cuadrante: compuesto por los puntos cuya abscisa y ordenada son negativas, es decir, (–, –).
- IV cuadrante: compuesto por los puntos cuya abscisa es positiva y su ordenada es negativa, es decir, (+, –).

Gráficamente



Como en el enunciado se menciona que $\vec{m}$ está en el segundo cuadrante, entonces su abscisa es un número negativo y su ordenada es un número positivo, es decir, (–, +).

Ahora, se tiene que $\vec{m} = \vec{v} - \vec{u}$, donde $\vec{v}(7, -5)$ y considerando $\vec{u}(a, b)$, se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{m} &= (7, -5) - (a, b)\\ &= (7 - a, -5 - b)\end{aligned}$$

Aplicando $\vec{s}(x, y) - \vec{w}(m, n) = \vec{q}(x - m, y - n)$

Como $\vec{m}$ está en el segundo cuadrante se tienen las desigualdades:

$$\begin{array}{rcr} 7 - a < 0 & y & -5 - b > 0 \\ 7 < a & y & -5 > b \end{array}$$

Despejando a y b

Por lo anterior, el vector de la opción D) es el único de las opciones que cumple con estas condiciones, luego esta es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.

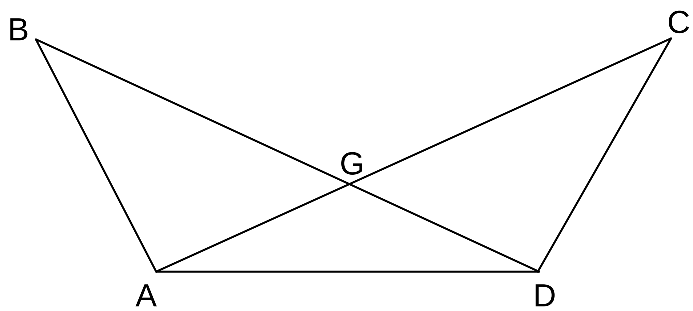
Contenido: Suma y resta de vectores

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: D

PREGUNTA 38

En la figura adjunta $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersectan en G y $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. Si $\measuredangle$ BAD = $\measuredangle$ CDA, ambos mayores que 90°, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) BG = GD

B) $\measuredangle$ ABD = $\measuredangle$ ACD

C) área Δ ABD = área Δ ACD

D) AB = DC

E) $\dfrac{\text{perímetro}\,\Delta\,ABD}{\text{perímetro}\,\Delta\,ACD} = 1$

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de las afirmaciones dadas en las opciones es falsa se debe recordar que:

> dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales la medida de dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos (criterio LLA).

En este caso, de la figura y de los datos del enunciado se tiene que Δ ABD $\cong$ Δ DCA, ya que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, $\overline{AD}$ lado común y $\measuredangle$ BAD = $\measuredangle$ CDA, ángulos opuestos al mayor de los lados.

En A) se tiene la igualdad BG = GD, la cual es falsa, pues nada se dice de las medidas de los lados de los triángulos AGB y ADG, por lo que los lados $\overline{BG}$ y $\overline{GD}$ podrían ser iguales o distintos.

Ahora, como Δ ABD $\cong \Delta$ DCA, se tiene que:

- $\sphericalangle$ ABD = $\sphericalangle$ ACD
- las áreas de ambos triángulos son iguales
- AB = DC

Por lo anterior, las igualdades dadas en B), en C) y en D) son verdaderas.

Por último, como los perímetros de ambos triángulos son iguales por ser congruentes entre sí, se tiene que la razón entre ellos es 1, por lo tanto, la igualdad en E) también es verdadera.

Por lo anterior, la clave es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Conocer y utilizar conceptos y propiedades asociados al estudio de la congruencia de figuras planas, para resolver problemas y demostrar propiedades.

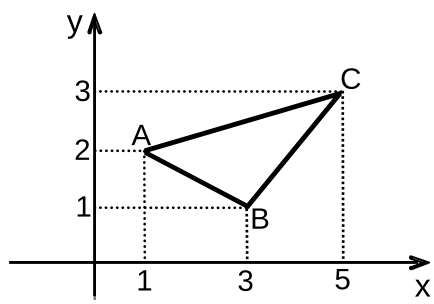
Contenido: Criterios de congruencia de triángulos

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: A

PREGUNTA 39

En la figura adjunta, al aplicar al triángulo ABC una simetría puntual con respecto al origen, se obtiene el triángulo A'B'C'. ¿Cuál(es) de las siguientes transformaciones isométricas aplicada(s) al triángulo A'B'C', permite(n) obtener el triángulo ABC como imagen?



I) Una reflexión con respecto al eje y, seguida de una reflexión con respecto al eje x.

II) Una traslación según el vector (2, 4).

III) Una rotación en 180° con centro en el origen y en sentido antihorario.

A) Solo III

B) Solo I y II

C) Solo I y III

D) Solo II y III

E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Del enunciado se tiene que al aplicar al triángulo ABC de la figura una simetría puntual con respecto al origen, se obtiene el triángulo A'B'C', es decir, a cada punto del triángulo ABC se le aplica una simetría puntual.

> **Recuerde que:**
> al aplicar una simetría puntual al punto *(a, b)* con respecto al origen del plano cartesiano se obtiene el punto *(–a, –b)*.

Del gráfico se tiene que los vértices del triángulo ABC son A(1, 2), B(3, 1) y C(5, 3), aplicando la simetría puntual con respecto al origen del plano cartesiano se tienen como imágenes los puntos A'(–1, –2), B'(–3, –1) y C'(–5, –3).

Ahora, se debe determinar con cuál(es) de las transformaciones isométricas dadas en I), en II) y en III) aplicadas al triángulo A'B'C' se puede(n) obtener el triángulo ABC como imagen.

En I) se determinará si al aplicar una reflexión al triángulo A'B'C' con respecto al eje y, seguido de una reflexión con respecto al eje x se obtiene el triángulo ABC.

Recuerde que:
- si al punto *(a, b)* se le aplica una reflexión con respecto al eje y, entonces se obtiene el punto (*–a*, *b*).
- si al punto *(a, b)* se le aplica una reflexión con respecto al eje x, entonces se obtiene el punto (*a*, *–b*).

Así, al aplicar al triángulo A'B'C' una reflexión con respecto al eje y se obtiene el triángulo de vértices P(1, –2), Q(3, –1) y R(5, –3). Ahora, al aplicar al triángulo PQR una reflexión con respecto al eje x se obtiene el triángulo de vértices (1, 2), (3, 1) y (5, 3), por lo tanto, con la transformación isométrica dada en I) se obtiene el triángulo ABC.

En II) se aplicará una traslación según el vector (2, 4) al triángulo A'B'C'.

Recuerde que:
si el **punto** *(p, q) se* **traslada** según el vector *(v, w)*, entonces se obtiene el punto *(p + v, q + w)*.

De esta manera, al aplicar la traslación según el vector (2, 4) al triángulo A'B'C' se obtiene un triángulo cuyos vértices son (1, 2), (–1, 3) y (–3, 1), que no corresponden a los vértices del triángulo ABC.

Por último, en III) se determinará si al aplicar una rotación en 180° con centro en el origen y en sentido antihorario al triángulo A'B'C' se obtiene el triángulo ABC.

Recuerde que:
al rotar un punto *(x, y)* en ***180°*** en sentido antihorario se obtiene el punto de coordenadas *(–x, –y)*.

De esta forma, al aplicar la rotación en 180° con sentido antihorario al triángulo de vértices A'(–1, –2), B'(–3, –1) y C'(–5, –3) se obtiene el triángulo de vértices (1, 2), (3, 1) y (5, 3) que corresponden a los vértices del triángulo ABC.

Como solo con las transformaciones isométricas dadas en I) y en III) aplicadas al triángulo A'B'C' se obtiene el triángulo ABC, la clave es la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas y utilizar la composición de funciones para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas.

Contenido: Traslaciones, reflexiones y rotaciones sobre figuras geométricas en el plano cartesiano

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 40

Considere el rectángulo ABCD, donde tres de sus vértices son A(b, b), B(a, b) y $C\left(a, -\frac{1}{2}b\right)$, con a y b números reales tal que ab < 0 y a < b. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa **siempre** el área de este rectángulo?

A) $\dfrac{3b(b-a)}{2}$

B) $\dfrac{3b(b+a)}{2}$

C) $\dfrac{b(b+a)}{2}$

D) $\dfrac{b(a-b)}{2}$

E) $\dfrac{3b(a-b)}{2}$

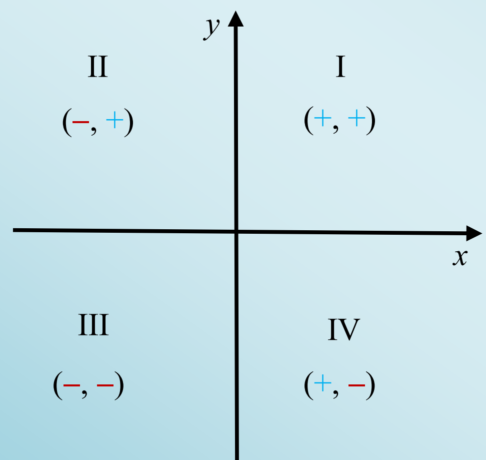
RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem se debe analizar las condiciones dadas en el enunciado para las coordenadas de los vértices del rectángulo ABCD para ubicarlos en el plano cartesiano y así determinar cuál de las expresiones dadas en las opciones representa siempre al área de este rectángulo.

Recuerde que:
el plano cartesiano está dividido en cuatro cuadrantes, estos son:

- I cuadrante: compuesto por los puntos cuyas coordenadas son positivas, es decir, (+, +).
- II cuadrante: compuesto por los puntos cuya abscisa es negativa y su ordenada es positiva, es decir, (–, +).
- III cuadrante: compuesto por los puntos cuya abscisa y ordenada son negativas, es decir, (–, –).
- IV cuadrante: compuesto por los puntos cuya abscisa es positiva y su ordenada es negativa, es decir, (+, –).

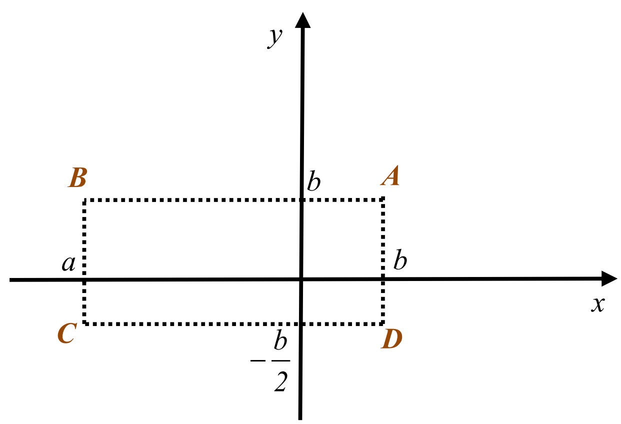
Gráficamente



Ahora, como $ab < 0$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \boxed{a < 0 \text{ y } b > 0} \\ \boxed{ab < 0} & & \\ & \searrow & \boxed{a > 0 \text{ y } b < 0} \end{array}$$

Pero, como $a < b$, se tiene que $a < 0$ y $b > 0$, luego el punto $A(b, b)$ está en el primer cuadrante, $B(a, b)$ está en el segundo cuadrante y $C\left(a, -\frac{1}{2}b\right)$ está en el tercer cuadrante, como se representan a continuación:



Para determinar una expresión que represente el área del rectángulo, se debe determinar expresiones para las medidas de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$.

Recuerde que:
el área de un rectángulo es el producto entre las medidas de sus lados contiguos (desiguales).

Así, la medida de $\overline{AB}$ está dada por la suma de las distancias de B y de A al eje y. Como a es negativo, la distancia de B al eje y es $-a$ y la distancia de A al eje y es b, luego, $AB = b + -a = b - a$.

Por otro lado, la medida de $\overline{CB}$ está dada por la suma de las distancias de B y de C al eje x. Como la distancia de B al eje x es b y la distancia de C al eje x es $\frac{b}{2}$, se tiene que $BC = b + \frac{b}{2} = \frac{3b}{2}$.

Por lo tanto, la expresión que representa el área del rectángulo ABCD está dada por $\frac{3b}{2} \cdot (b - a) = \frac{3b(b - a)}{2}$, expresión que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.

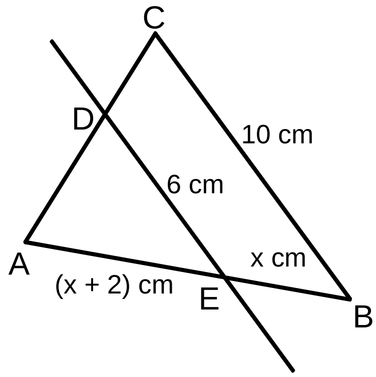
Contenido: Representación de puntos en el plano cartesiano

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: A

PREGUNTA 41

En el triángulo ABC de la figura adjunta, D pertenece a $\overline{AC}$ y E pertenece a $\overline{AB}$. Si $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$, ¿cuál es la medida del segmento AE?



A) 5 cm

B) 6 cm

C) 7 cm

D) 9 cm

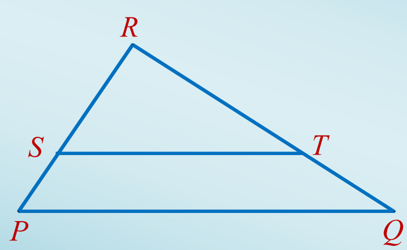
E) 10 cm

RESOLUCIÓN

Una manera de determinar la medida de $\overline{AE}$ es formular una ecuación que permita obtener el valor de x aplicando el teorema de Thales.

Recuerde que:

al aplicar el **teorema de Thales** al triángulo de la figura, donde $\overline{ST}$ // $\overline{PQ}$, se obtiene la relación $\frac{RS}{RP} = \frac{RT}{RQ} = \frac{ST}{PQ}$.



Así, como $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$ se puede aplicar el teorema de Thales, obteniendo lo siguiente:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC}$$

Reemplazando por las medidas respectivas

$$\frac{x+2}{2x+2} = \frac{6}{10}$$

Multiplicando por *10(2x + 2)* en ambos lados de la igualdad

$$10x + 20 = 12x + 12$$

Despejando *x*

$$x = 4$$

Luego, AE = (x + 2) cm = 6 cm, medida que se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría proporcional

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

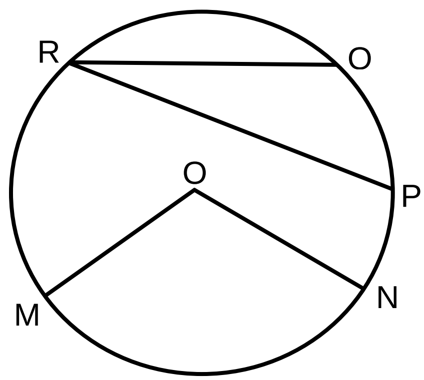
Contenido: Teorema de Thales

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 42

Los puntos M, N, P, Q y R pertenecen a la circunferencia de centro O de la figura adjunta. Si ∢ MON = 2 · ∢ POQ y ∢ OMN = 40°, ¿cuál es la medida del ∢ PRQ?



A) 12,5°

B) 10°

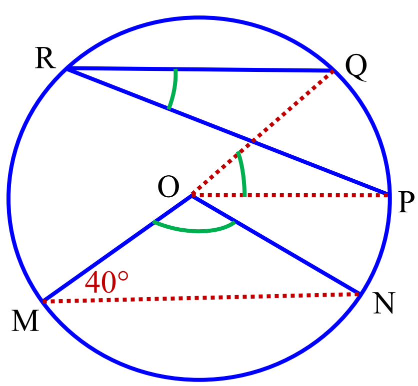
C) 25°

D) 50°

E) 100°

RESOLUCIÓN

En la siguiente figura se representan los datos dados en el enunciado de la pregunta. Además, se han incorporado algunas líneas auxiliares para facilitar la resolución del ítem.



Para determinar la medida del ∢ PRQ se calculará la medida del ∢ POQ, pues subtienden el mismo arco.

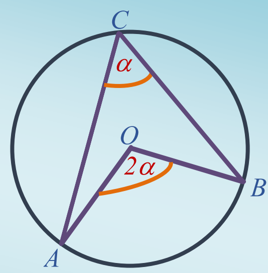
Como $\overline{MO}$ y $\overline{NO}$ son radios de la circunferencia, el Δ MNO es isósceles de base $\overline{MN}$, por lo que ∢ MNO = 40° y ∢ MON = 180° – 80° = 100°.

De la relación dada en el enunciado, $\measuredangle$ MON = 2 · $\measuredangle$ POQ, se tiene que:

$$100° = 2 \cdot \measuredangle POQ$$

$$50° = \measuredangle POQ$$

Recuerde que:
en una circunferencia de centro O, la medida del **ángulo del centro** ($\measuredangle AOB$) es igual al doble de la medida del **ángulo inscrito** ($\measuredangle ACB$) que subtiende el mismo arco.



Así, $\measuredangle$ POQ = 2 · $\measuredangle$ PRQ

$$50° = 2 \cdot \measuredangle PRQ$$

$$25° = \measuredangle PRQ$$

Medida que se encuentra en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.

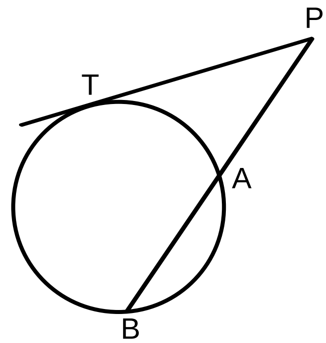
Contenido: Ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 43

En la circunferencia de la figura adjunta la recta PT es tangente a ella en T, la recta PB es una secante, el punto A y el punto B pertenecen a la circunferencia, PA = AB, PT = 10 cm y los puntos B, A y P son colineales. ¿Cuál es la medida del segmento PB?



A) 10 cm

B) $10\sqrt{2}$ cm

C) $2\sqrt{10}$ cm

D) 20 cm

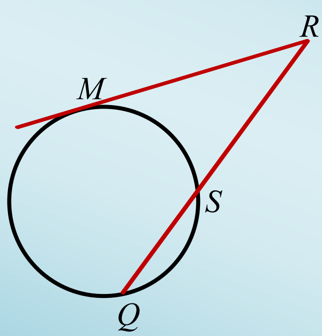
E) $\sqrt{10}$ cm

RESOLUCIÓN

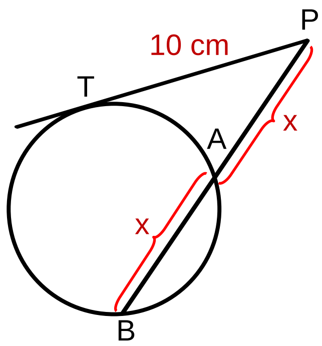
Para determinar la medida del segmento PB de la figura se puede aplicar la relación entre la secante $\overline{PB}$ y la tangente $\overline{PT}$ a la circunferencia.

Recuerde que:

en una circunferencia, donde la secante $\overline{RQ}$ se intersecta con la tangente $\overline{RM}$, tangente en el punto *M*, se cumple que $RM^2 = RS \cdot RQ$



Así, si se designa por x a la medida de $\overline{PA}$ y tomando los datos del enunciado se tiene la siguiente figura:



Aplicando la relación antes descrita se tiene:

$$10^2 = x \cdot 2x$$

$$100 = 2x^2$$

$$50 = x^2$$

$$\pm 5\sqrt{2} = x$$

Como x representa la medida de un segmento, se tiene $x = 5\sqrt{2}$ cm.

Luego, $PB = 2x = 10\sqrt{2}$ cm, medida que se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría proporcional

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

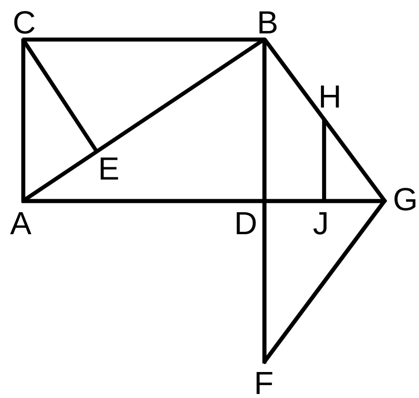
Contenido: Relación entre una tangente y una secante en una circunferencia

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 44

En la figura adjunta ADBC es un rectángulo, E pertenece a $\overline{AB}$, $\overline{CE} \perp \overline{AB}$, A, D y G son puntos colineales, D es el punto medio de $\overline{BF}$, H y J son los puntos medios de $\overline{BG}$ y $\overline{DG}$, respectivamente. ¿Cuál(es) de las siguientes semejanzas es (son) **siempre** verdadera(s)?



I) Δ AEC ~ Δ ACB
II) Δ ADB ~ Δ FDG
III) Δ BDG ~ Δ HJG

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Solo I y III

RESOLUCIÓN

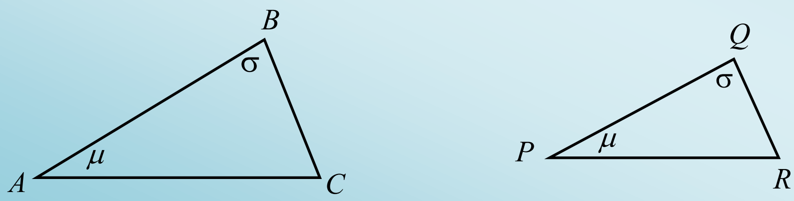
Para encontrar la solución a la pregunta, se debe verificar la veracidad de las semejanzas dadas en I), en II) y en III).

De la información entregada en el enunciado, se tiene que:

1. Como D es el punto medio de $\overline{BF}$, entonces BD = DF.
2. Como H es el punto medio de $\overline{BG}$ y J es el punto medio de $\overline{DG}$, entonces el segmento HJ es mediana del triángulo DGB.
3. Los triángulos ABC, DGB, DGF y AEC son triángulos rectángulos.

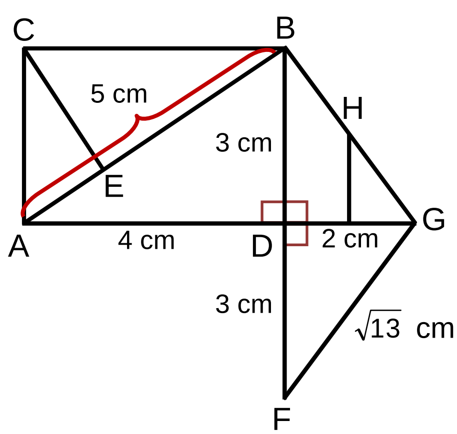
Recuerde que:
en dos triángulos semejantes se cumple que sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

Además, se tienen los siguientes criterios de congruencia de triángulos:
- si dos triángulos tienen dos ángulos de igual medida, entonces los triángulos son semejantes (criterio AA).
- si dos triángulos tienen tres pares de lados correspondientes proporcionales, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{CB}{RQ} = k$, con k constante, entonces los triángulos son semejantes (criterio LLL).



Como $\sphericalangle$ AEC = $\sphericalangle$ ACB = 90° y $\sphericalangle$ CAB es común a los triángulos AEC y ACB, entonces Δ AEC $\sim$ Δ ACB por el criterio ángulo-ángulo (AA). Así, la afirmación en I) es verdadera.

La semejanza dada en II) no siempre es verdadera, lo que se puede ver a través del siguiente contraejemplo:



De la figura se puede observar que no existe una proporcionalidad entre los lados de los triángulos, esto es, $\frac{AD}{FD} \neq \frac{DB}{DG} \neq \frac{AB}{FG}$, por lo que los triángulos ADB y FDG no son semejantes.

Por último, la semejanza en III) es verdadera, porque al ser $\overline{HJ}$ mediana del triángulo DGB se cumple que:

$$\frac{BD}{HJ} = \frac{DG}{JG} = \frac{BG}{HG} = 2$$

Lo que implica que los triángulos BDG y HJG son semejantes, por el criterio LLL.

Por lo anterior, la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría proporcional

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

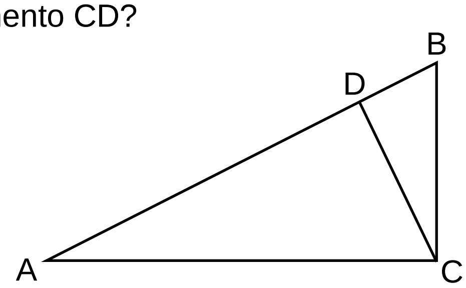
Contenido: Criterios de semejanza de triángulos

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: E

PREGUNTA 45

En el triángulo ABC rectángulo en C de la figura adjunta, el segmento CD es altura y D pertenece al segmento AB. Si AB = $15\sqrt{2}$ cm y BD : DA = 1 : 4, ¿cuál es la medida del segmento CD?



A) 2 cm

B) $6\sqrt{2}$ cm

C) 72 cm

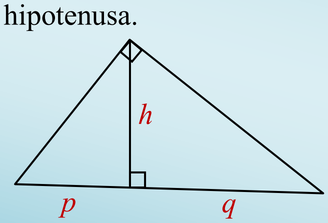
D) $3\sqrt{10}$ cm

E) $6\sqrt{10}$ cm

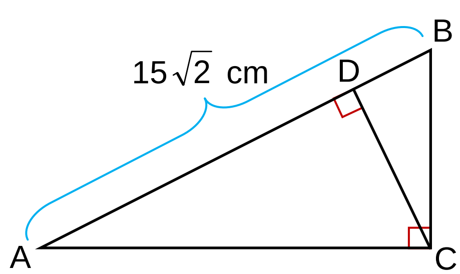
RESOLUCIÓN

Para encontrar la medida del segmento CD se puede utilizar el teorema de Euclides referido a la altura.

Recuerde que:
al aplicar el teorema de Euclides referido a la altura en cualquier triángulo rectángulo, cuya altura (h) trazada desde el vértice opuesto a la hipotenusa, se cumple $h^2 = p \cdot q$, donde p y q son las medidas de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.



Al colocar los datos del enunciado en la figura, se tiene:



Luego, BD + DA = $15\sqrt{2}$. Como BD : DA = 1 : 4, entonces DA = 4·BD.

De esta manera, se tiene que 5·BD = $15\sqrt{2}$ llegando a BD = $3\sqrt{2}$ cm.

Así, DA = $12\sqrt{2}$ cm

Aplicando el teorema de Euclides, se obtiene que:

$$CD^2 = BD \cdot DA$$

$$CD^2 = 3\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2}$$

$$CD^2 = 72$$

$$CD = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

Medida que se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría proporcional

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

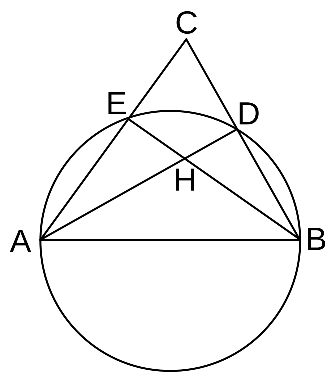
Contenido: Teorema de Euclides

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 46

En la figura adjunta el segmento AB es un diámetro de la circunferencia y las prolongaciones de las cuerdas $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ se intersectan en el punto C. Si H es el punto de intersección de las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?



I) Δ AHE ~ Δ BHD

II) La recta HC intersecta al segmento AB en su punto medio.

III) $\measuredangle$ DBA = $\measuredangle$ EAB

A) Solo I

B) Solo III

C) Solo I y II

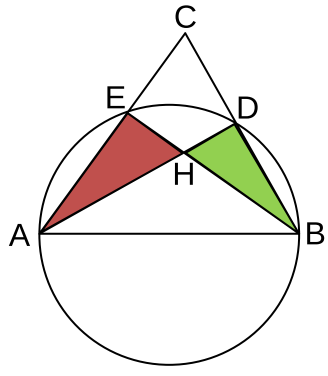
D) Solo II y III

E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta a la pregunta se analizarán las afirmaciones dadas en I) en II) y en III).

En I) se tiene que verificar que los triángulos AHE y BHD son semejantes.

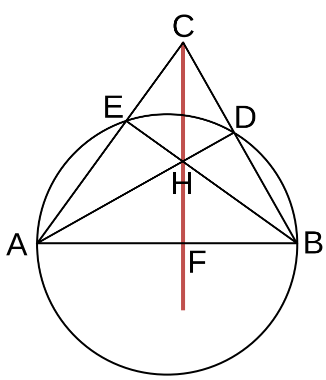


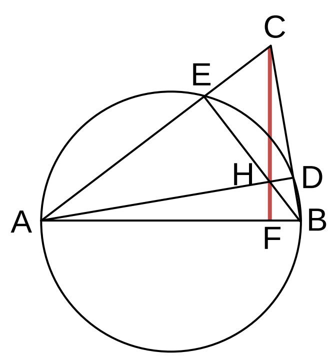
Recuerde que:

- un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.
- los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco tienen igual medida.
- si dos triángulos tienen dos pares de ángulos de igual medida, entonces los triángulos son semejantes (criterio *AA*).

Como los ángulos AEB y ADB están inscritos en una semicircunferencia ($\overline{AB}$ es diámetro) se tiene que $\measuredangle$ AEH = $\measuredangle$ HDB = 90°. Además, los ángulos EAD y EBD subtienden el mismo arco, luego $\measuredangle$ EAH = $\measuredangle$ HBD. Por lo tanto, se cumple que Δ AHE ~ Δ BHD por el criterio AA, luego la afirmación en I) es verdadera.

Para analizar la afirmación dada en II) se traza la recta HC que intersecta a $\overline{AB}$ en F, tal como se muestra las siguientes figuras:





Como se observa en las figuras anteriores no siempre el punto F es el punto medio del segmento AB, pues C es un punto movible, mientras que A y B están fijos.

De esta manera, la afirmación dada en II) no siempre es verdadera.

En la afirmación III) se afirma que los ángulos DBA y EAB son iguales, esto se cumple solo cuando los arcos BE y DA son iguales. Esta situación no siempre ocurre, por ejemplo, en la figura de la derecha anterior los arcos mencionados claramente son distintos, así la afirmación en III) es siempre verdadera.

Del análisis realizado se concluye que la opción correcta es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría proporcional

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

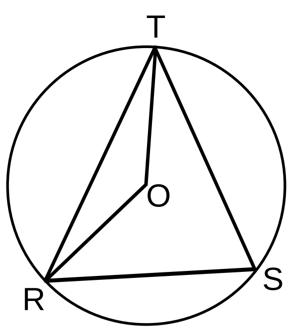
Contenido: Semejanza de triángulos

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: A

PREGUNTA 47

En la circunferencia de centro O de la figura adjunta los puntos R, S y T pertenecen a ella. Se puede determinar la medida del ∢ OTR, si se sabe que:



(1) ∢ OTS = 35°

(2) ∢ TSR = 84°

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

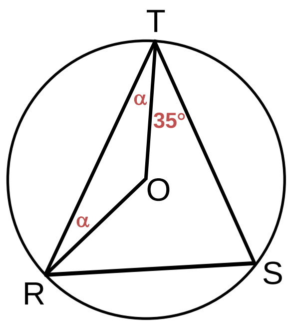
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

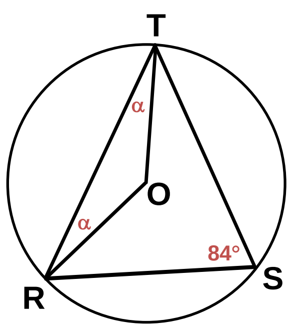
Para resolver el ítem se debe determinar si con los datos dados en (1) y/o en (2) se puede encontrar la medida del ángulo OTR.

De la figura se tiene que el triángulo ROT es isósceles, porque $\overline{OT}$ y $\overline{OR}$ son radios de la circunferencia y de (1) se tiene que el ∢ OTS = 35°, como se representa en la siguiente figura:



Pero con estos datos no se puede determinar la medida del ángulo OTR, ya que R es movible.

Por otro lado, de (2) se tiene que ∢ TSR = 84°, gráficamente es:



Recuerde que:
en una circunferencia, la medida de un **ángulo del centro** es igual al doble de la medida de un **ángulo inscrito** que subtiende el mismo arco.

Como el ángulo del centro ROT subtiende el mismo arco que el ángulo inscrito TSR, se tiene que ∢ ROT = 2· ∢ TSR = 168°.

Además, se sabe que el triángulo ROT es isósceles, por lo que se puede plantear una ecuación, en α, que permite encontrar el valor del ángulo OTR.

Así, la respuesta correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.

Contenido: Ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: B

PREGUNTA 48

¿Qué valor debe tener K en la ecuación 5x + 2y = Ky – 6, en x e y, para que sea ecuación de una recta perpendicular a la recta de ecuación x + 5y – 2 = 0?

A) –23

B) 27

C) $\frac{1}{3}$

D) 3

E) –3

RESOLUCIÓN

Para determinar el valor de K, se puede usar la relación entre las pendientes de dos rectas perpendiculares.

> **Recuerde que:**
>
> en la ecuación de una recta de la forma $y = mx + n$, m es su pendiente y n es su coeficiente de posición.

Escribiendo las ecuaciones dadas de la forma y = mx + n se tiene

$$5x + 2y = Ky - 6$$

$$2y - Ky = -5x - 6$$

$$(2 - K)y = -5x - 6$$

$$y = -\frac{5}{2-K}x - \frac{6}{2-K}$$

Así, la pendiente de esta recta es $-\frac{5}{2-K}$.

Ahora,

$$x + 5y - 2 = 0$$

$$5y = -x + 2$$

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$$

Donde $-\frac{1}{5}$ es la pendiente de esta recta.

> **Recuerde que:**
> dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1.

Para que estas rectas sean perpendiculares se debe cumplir que $-\frac{5}{2-K} \cdot -\frac{1}{5} = -1$

Resolviendo esta ecuación se tiene que K = 3, valor que se encuentra en la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Establecer la relación entre la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen.

Contenido: Rectas perpendiculares

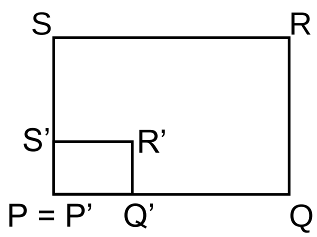
Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

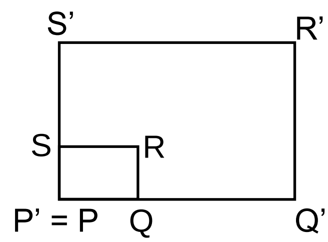
PREGUNTA 49

¿Cuál de las siguientes figuras es la que mejor representa al rectángulo PQRS y al rectángulo P’Q’R’S’ obtenido por una homotecia de centro P y razón $-\frac{1}{3}$ aplicada al rectángulo PQRS, donde el punto P’ es el correspondiente de P, Q’ es el de Q, R’ es el de R y S’ es el de S?

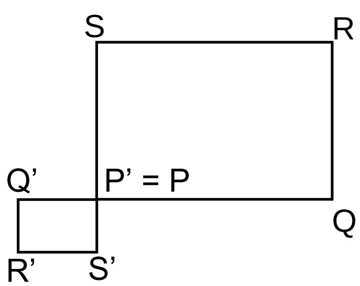
A)



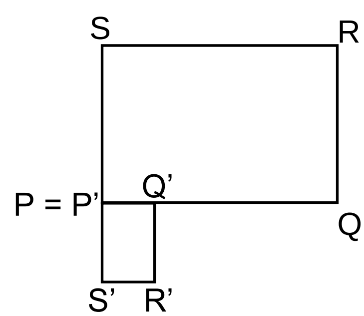
B)



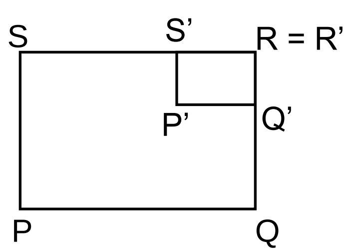
C)



D)



E)



RESOLUCIÓN

En este ítem se debe determinar cuál de las figuras dadas en las opciones representa al rectángulo PQRS y a su homotético P’Q’R’S’ obtenido de aplicar la homotecia planteada en el enunciado.

Recuerde que:

- una **Homotecia** es la transformación de una figura en otra semejante a ella, con respecto a un punto en el plano llamado centro de homotecia y a una razón dada llamada razón de homotecia (k).
- los puntos homotéticos y el centro de homotecia son colineales.
- si k es un valor negativo, entonces los puntos homotéticos están a lados opuestos del centro de homotecia.

La razón de homotecia dada en el enunciado es $-\frac{1}{3}$, por lo que el rectángulo P'Q'R'S' debe estar al lado opuesto del rectángulo PQRS con respecto al centro de homotecia P.

Ahora, al observar las figuras dadas en las opciones se puede deducir que la que mejor representa las condiciones antes mencionadas es la dada en la opción C), ya que P es colineal con Q y Q', y está entre ellos, también es colineal con S y S', y está entre ellos, además, es colineal con R y R', y está entre ellos.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría proporcional

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Homotecia de figuras planas

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: C

PREGUNTA 50

¿Para qué valores reales de q las rectas de ecuaciones L_1: 5x – 8y = 26 y L_2: qx + 2y = 12 son paralelas no coincidentes?

A) Solo para $q = -\frac{5}{4}$

B) Para cualquier valor de q distinto de $-\frac{5}{4}$

C) Solo para q = –5

D) Para cualquier valor de q distinto de 5

E) Para cualquier valor de q distinto de $\frac{74}{9}$

RESOLUCIÓN

Una forma de determinar para qué valores reales de q las rectas L_1 y L_2 son paralelas no coincidentes es comparar las pendientes de dichas rectas y los coeficientes de posición.

Recuerde que:
- en la **ecuación de una recta** de la forma $y = mx + n$ se tiene que m es su pendiente y n es su coeficiente de posición.
- dos **rectas** son **paralelas** no coincidentes si sus pendientes son iguales y sus coeficientes de posición son distintos.

Luego, para determinar las pendientes y los coeficientes de posición de L_1 y L_2 se escribirán las ecuaciones de estas rectas de la forma y = mx + n.

En L_1:

$$5x - 8y = 26$$

$$-8y = -5x + 26$$

$$y = \frac{5}{8}x - \frac{13}{4}$$

En L_2:

$$qx + 2y = 12$$

$$2y = -qx + 12$$

$$y = -\frac{q}{2}x + 6$$

Como las rectas deben ser paralelas, entonces sus pendientes deben ser iguales, es decir, $\frac{5}{8} = -\frac{q}{2}$, de donde se obtiene que q = $-\frac{5}{4}$.

Además, no son coincidentes, ya que los coeficientes de posición de las rectas son distintos, esto es, $-\frac{13}{4} \neq 6$.

Por lo anterior, solo para el valor $-\frac{5}{4}$ las rectas L_1 y L_2 son paralelas no coincidentes, por lo que la clave es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Establecer la relación entre la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen.

Contenido: Posiciones relativas de rectas en el plano

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 51

Considere los puntos del plano cartesiano A(4, 5), B(8, 2) y C(12, p), con $p > 0$. Si la distancia entre A y C es el doble que la distancia entre A y B, ¿cuál es el valor de p?

A) 1

B) 7

C) 11

D) $\sqrt{51}$

E) Ninguno de los anteriores

RESOLUCIÓN

Una manera de resolver esta pregunta es determinar la distancia entre los puntos A y C (d_{AC}) y la distancia entre los puntos A y B (d_{AB}), para luego plantear la igualdad $d_{AC} = 2 \cdot d_{AB}$.

> **Recuerde que:**
> la **distancia entre los puntos** *P(x, y)* y *Q(r, s)* en el plano cartesiano está dada por
> $d_{PQ} = \sqrt{(r-x)^2 + (s-y)^2}$.

Así, la distancia entre A(4, 5) y C(12, p) es:

$$d_{AC} = \sqrt{(12-4)^2 + (p-5)^2}$$
$$d_{AC} = \sqrt{64 + (p-5)^2}$$

De la misma forma, la distancia entre A(4, 5) y B(8, 2) es:

$$d_{AB} = \sqrt{(8-4)^2 + (2-5)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{16 + 9}$$
$$d_{AB} = \sqrt{25}$$
$$d_{AB} = 5$$

Ahora, se tiene que:

$$d_{AC} = 2 \cdot d_{AB}$$

$$\sqrt{64 + (p - 5)^2} = 10$$

$$64 + (p - 5)^2 = 100$$

$$(p - 5)^2 = 36$$

$$p - 5 = \pm 6$$

$$p = 11 \quad \text{y} \quad p = -1$$

Como $p > 0$, entonces el valor de p es 11, el cual se encuentra en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 52

Si la recta que pasa por los puntos (3, –4) y (4, –3) tiene por ecuación y = mx + n, en x e y, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

A) $m > 0$ y $n > 0$

B) $m > 0$ y $n < 0$

C) $m < 0$ y $n > 0$

D) $m < 0$ y $n < 0$

E) $m > 0$ y $n = 0$

RESOLUCIÓN

Una forma de resolver el ítem es determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados en el enunciado, escribiéndola de la forma y = mx + n, para luego determinar si los coeficientes m y n son positivos, negativos o cero.

Recuerde que:

- en la **ecuación de una recta** de la forma $y = mx + n$ se tiene que m es su pendiente y n es su coeficiente de posición.
- una forma de la **ecuación de una recta** que pasa por los puntos $P(a,\ b)$ y $Q(c,\ d)$ está dada por $(y - d) = \dfrac{d - b}{c - a}(x - c)$.

De esta manera, la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, –4) y (4, –3), es:

$$y + 3 = \frac{-3 + 4}{4 - 3}(x - 4)$$

$$y = (x - 4) - 3$$

$$y = x - 7$$

De esta ecuación se tiene que la pendiente es 1, por lo que $m > 0$ y el coeficiente de posición es –7, por esto $n < 0$.

Por lo anterior, la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

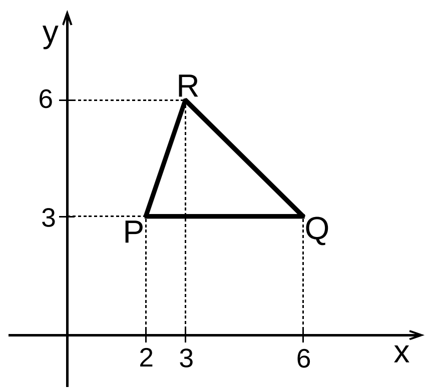
Contenido: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 53

Al triángulo PQR de la figura adjunta, se le aplica una homotecia con centro en el origen del plano cartesiano. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) Si la razón de homotecia es $\frac{1}{2}$, entonces el perímetro del triángulo homotético es la mitad del perímetro del Δ PQR.

B) Si la razón de homotecia es -1, entonces el triángulo homotético es congruente con el Δ PQR.

C) Si la razón de homotecia es menor que -1, entonces el triángulo homotético tiene menor área que el Δ PQR.

D) Si la razón de homotecia es 1, entonces el triángulo homotético es el mismo Δ PQR.

E) Si la razón de homotecia es $\frac{3}{2}$, entonces el área del triángulo homotético es más del doble del área del Δ PQR.

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de las afirmaciones dadas en las opciones es falsa se debe comprender qué sucede con la imagen del ∆ PQR de la figura adjunta, cuando se le aplica una homotecia con centro en el origen del plano cartesiano y según la razón dada en cada una de las opciones.

Recuerde que:

- una **Homotecia** es la transformación de una figura en otra semejante a ella, con respecto a un punto en el plano llamado centro de homotecia y a una razón dada llamada razón de homotecia (k).
- la **razón de los perímetros de dos polígonos homotéticos** es igual al valor absoluto de la razón de homotecia.

En A) se señala que la razón de homotecia es $\frac{1}{2}$, por lo que perímetro del triángulo homotético del ∆ PQR es la mitad del perímetro de este. Lo que implica que la afirmación dada en esta opción es verdadera.

Para verificar la afirmación dada en B),

Recuerde que:

- en una homotecia de razón k, si $k = 1$ o $k = -1$, entonces la figura obtenida de la homotecia tiene las medidas de sus lados iguales a las de la figura original y en el caso de $k = 1$ la figura obtenida coincide con la figura original.
- si dos triángulos tienen los tres pares de lados de igual medida, entonces son congruentes (criterio LLL).

Así, la afirmación dada en esta opción dice que la razón de homotecia es –1, por lo que las medidas de los triángulos homotéticos son iguales, esto implica que los triángulos son congruentes y por lo tanto, la afirmación dada en esta opción es verdadera.

Para determinar la veracidad de la afirmación dada en C),

Recuerde que:

en una homotecia de razón k, si $k > 1$ ó $k < -1$, entonces la figura obtenida de la homotecia tiene las medidas de sus lados mayores a las de la figura original, equivalentes a k veces la figura original.

En esta afirmación se plantea que la razón de homotecia es menor que –1, lo que implica que las medidas de los lados del triángulo homotético del ∆ PQR son mayores que las medidas de los lados correspondientes en el ∆ PQR, por lo que el área de su imagen es mayor que el área del triángulo original, por lo tanto, la afirmación de esta opción es falsa.

Para determinar si es verdadera la afirmación dada en D), se tiene que al ser la razón de homotecia 1, las medidas de los triángulos homotéticos son iguales y por lo tanto, son triángulos congruentes que tienen las mismas coordenadas. Luego, esta afirmación es verdadera.

Por último, en E) se señala que la razón de homotecia es $\frac{3}{2}$, de manera que las medidas de los lados del triángulo homotético del Δ PQR son $\frac{3}{2}$ veces las medidas de los lados correspondientes del triángulo original.

Recuerde que:
la **razón entre las áreas de dos polígonos semejantes** es igual a la razón de los cuadrados de las medidas de los lados homólogos.

De lo anterior se tiene que el área del triángulo homotético es $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ veces el área del Δ PQR, o sea, es más del doble del área del Δ PQR, por lo que la afirmación de esta opción es verdadera.

Por el desarrollo anterior, se tiene que la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría proporcional

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

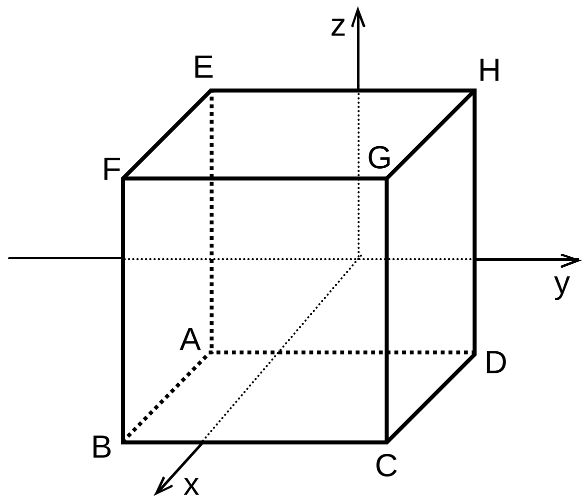
Contenido: Homotecia de figuras planas

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: C

PREGUNTA 54

El rectángulo ABCD que está en el plano xy se traslada verticalmente hacia arriba en cuatro unidades, donde su barrido genera un prisma como se muestra en la figura adjunta. El área del rectángulo ABCD es 8 unidades cuadradas, donde dos de sus vértices son A(2, –1, 0) y B(4, –1, 0). ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) El vértice C es (4, 3, 0).

II) El volumen del prisma es 32 unidades cúbicas.

III) La diagonal $\overline{DG}$ mide $2\sqrt{5}$ unidades.

A) Solo I

B) Solo I y II

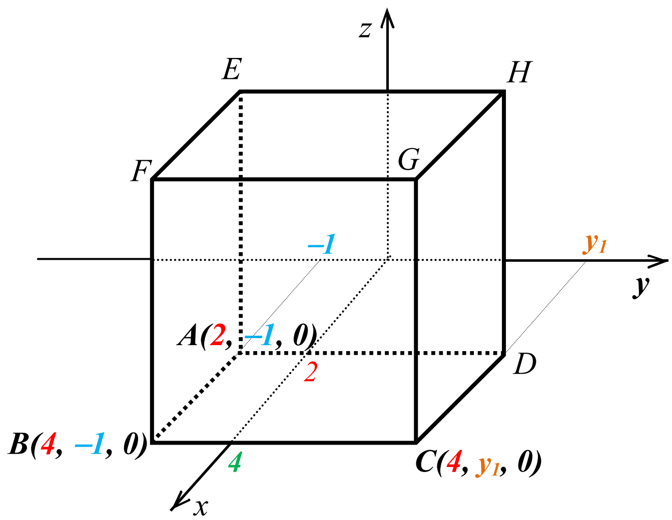
C) Solo I y III

D) Solo II y III

E) I, II y III

RESOLUCIÓN

En este ítem se debe determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III), para ello en la figura se ubicarán las coordenadas de los puntos A(2, –1, 0), B(4, –1, 0) y C(4, y_1, 0), como se muestra a continuación:



En el enunciado se indica que el área del rectángulo ABCD es 8 unidades cuadradas, es decir, AB · BC = 8.

Recuerde que:
en un sistema de coordenadas tridimensional la **distancia entre los puntos** *P(x, y, z)* y *Q(r, s, t)* está dada por $d_{PQ} = \sqrt{(r-x)^2 + (s-y)^2 + (t-z)^2}$.

Aplicando la fórmula anterior se tiene que:
$d_{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (-1+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4} = 2$ unidades

Medida que al reemplazar en AB · BC = 8 se tiene 2 · BC = 8, de donde BC = 4 unidades.

Para determinar la veracidad de la afirmación en I) se debe encontrar y_1 del vértice C.

Luego, $d_{BC} = \sqrt{(4-4)^2 + (y_1+1)^2 + (0-0)^2} = 4$

$$(y_1 + 1)^2 = 16$$
$$y_1 + 1 = 4$$
$$y_1 = 3$$

Así, el vértice C es (4, 3, 0), por lo que la afirmación en I) es verdadera.

Para determinar la veracidad de la afirmación en II) se debe encontrar el volumen del prisma de la figura, para lo cual hay que recordar que:

el **volumen (*V*) de un prisma** donde sus aristas miden *p unidades*, *q unidades* y *r unidades* es ***V* = *pqr*** *unidades cúbicas*.

Ahora, como el prisma se obtuvo de trasladar verticalmente el rectángulo ABCD hacia arriba en cuatro unidades, se obtiene que CG = 4 unidades, por lo tanto,

$$AB \cdot BC \cdot CG = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32 \text{ unidades cúbicas}$$

Por lo anterior, la afirmación en II) es verdadera.

Por último, para determinar la veracidad de la afirmación en III) se debe encontrar la medida de la diagonal $\overline{DG}$, que corresponde a una diagonal de la cara CDHG del prisma. Para determinar la medida de este segmento se puede aplicar el teorema de Pitágoras en el Δ GCD rectángulo en C.

De esta manera, $DG^2 = CG^2 + CD^2$

Como CD = AB = 2 unidades y CG = 4 unidades, se llega a que:

$$DG^2 = 2^2 + 4^2$$
$$DG^2 = 20$$
$$DG = 2\sqrt{5} \text{ unidades}$$

Así, la afirmación en III) también es verdadera.

Como las tres afirmaciones son verdaderas, la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.

Contenido: Distancia entre dos puntos en el sistema coordenado tridimensional

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 55

¿Cuál es el área, en unidades cuadradas, de un triángulo isósceles de vértices A(4, –2, 0), B(0, –4, 2) y C(0, 0, 0)?

A) 10

B) $\sqrt{14}$

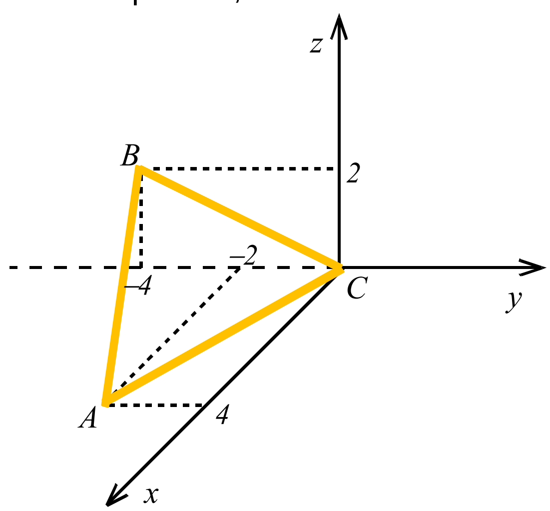
C) $\sqrt{84}$

D) $\sqrt{336}$

E) $\sqrt{320}$

RESOLUCIÓN

Una forma de determinar el área del triángulo isósceles de vértices A(4, –2, 0), B(0, –4, 2) y C(0, 0, 0), es ubicar las coordenadas de estos vértices en el plano tridimensional, para visualizar el triángulo que se forma y así, determinar la medida de los segmentos que se necesitan para calcular el área respectiva, como se muestra en la siguiente figura:

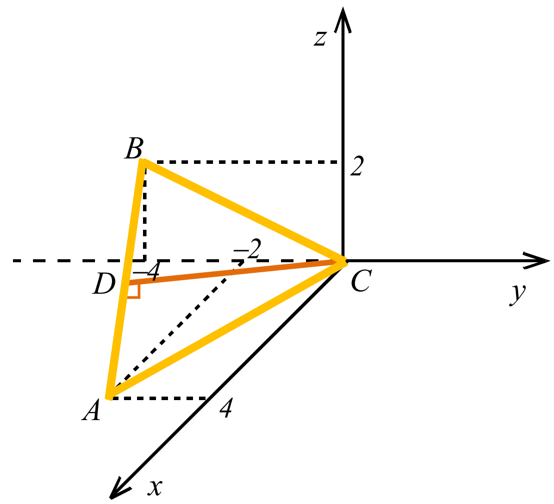


Recuerde que:

el **área de un triángulo** es $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$, donde b es un lado del triángulo y h es la altura correspondiente.

En la figura $\overline{AC}$ corresponde a la diagonal de un rectángulo en el plano xy, cuyos lados miden 2 y 4 unidades, además, $\overline{BC}$ corresponde a la diagonal de un rectángulo en el plano yz, cuyos lados miden 2 y 4 unidades, por lo que AC = BC. De esta manera, el Δ ABC es isósceles de base $\overline{AB}$.

Si en la figura se traza la altura correspondiente a la base, se tiene que $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$, como se representa a continuación:



Luego, el área del Δ ABC es $\dfrac{AB \cdot CD}{2}$.

Para determinar la medida de $\overline{AB}$,

Recuerde que:
en un sistema de coordenadas tridimensional la **distancia entre los puntos** $P(x, y, z)$ y $Q(r, s, t)$ está dada por $d_{PQ} = \sqrt{(r-x)^2 + (s-y)^2 + (t-z)^2}$.

Así, $d_{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (-2+4)^2 + (0-2)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{16 + 4 + 4}$

$d_{AB} = \sqrt{24}$ unidades

Ahora, para determinar la medida de $\overline{CD}$ recuerde que:

- la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles intersecta a la base en su punto medio.
- en un sistema de coordenadas tridimensional el **punto medio de un segmento** que tiene por extremos los puntos (x, y, z) y (r, s, t) es $\left(\dfrac{x+r}{2}, \dfrac{y+s}{2}, \dfrac{z+t}{2}\right)$.

De esta manera, el punto D de la figura es el punto medio de $\overline{AB}$ y sus coordenadas son $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{-2+-4}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$ = (2, –3, 1).

Luego, $d_{CD} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}$

$d_{CD} = \sqrt{4+9+1}$

$d_{CD} = \sqrt{14}$ unidades

Con las medidas encontradas se puede determinar el área del Δ ABC:

$$\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{\sqrt{24} \cdot \sqrt{14}}{2} = \sqrt{84} \text{ unidades cuadradas}$$

Medida que se encuentra en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.

Contenido: Distancia entre dos puntos en el sistema coordenado tridimensional

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 56

¿Cuál(es) de las siguientes traslaciones de figuras planas genera **siempre** un cuerpo geométrico?

I) La traslación de un cuadrado mediante un vector que tiene igual módulo que la medida del lado del cuadrado.

II) La traslación de un cuadrado mediante un vector no nulo y ortogonal a él.

III) La traslación de un rectángulo.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

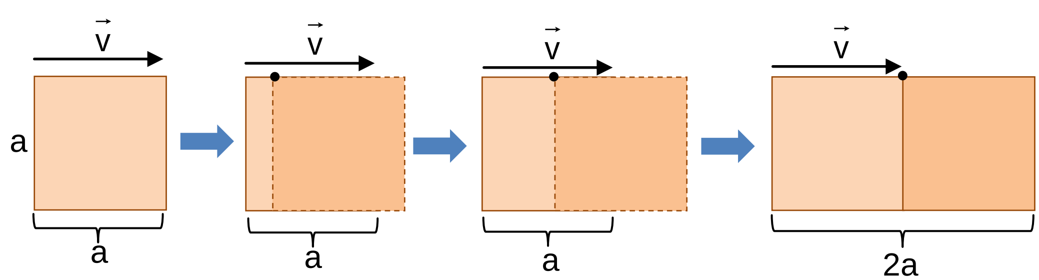
D) Solo I y III

E) Solo II y III

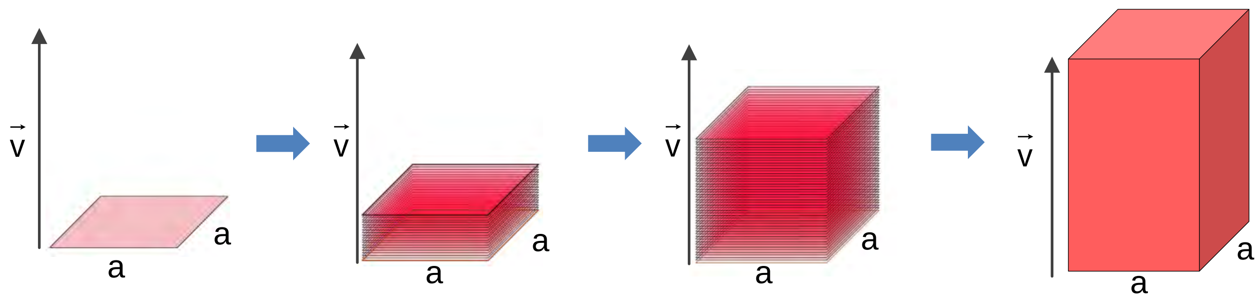
RESOLUCIÓN

En esta pregunta se debe determinar con cuál o cuáles de las traslaciones de la figura plana dadas en I), en II) y en III) se genera un cuerpo geométrico.

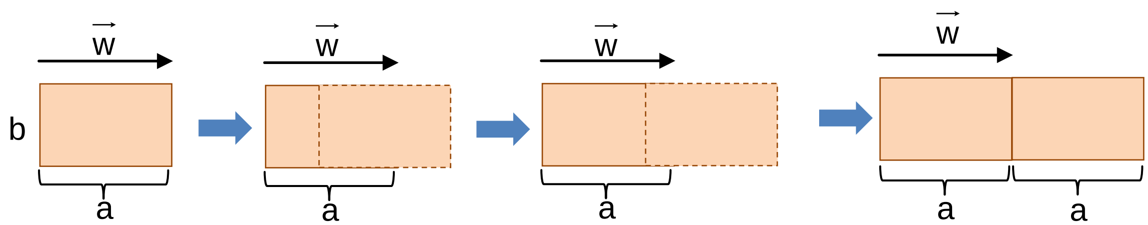
En I) se indica que se traslada un cuadrado mediante un vector que tiene igual módulo que la medida del lado del cuadrado, movimiento que no siempre genera un cuerpo geométrico, ya que si el cuadrado y el vector pertenecen a un mismo plano se genera un polígono que está en el mismo plano, como el que se muestra a continuación:



Ahora, en II) se señala que se traslada un cuadrado mediante un vector no nulo y ortogonal a él (perpendicular al cuadrado), movimiento que siempre genera con su barrido un cuerpo geométrico, como se muestra en la siguiente figura:



Por último, en III) se plantea una traslación de un rectángulo, sin indicar según qué vector se realiza la traslación, por lo que se puede dar el caso que el rectángulo y el vector estén en un mismo plano, lo que implicaría que no siempre a través de su barrido se forme un cuerpo geométrico, como se ejemplifica en la siguiente figura:



Como solo con el barrido de la traslación planteada en II) se forma un cuerpo geométrico, la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.

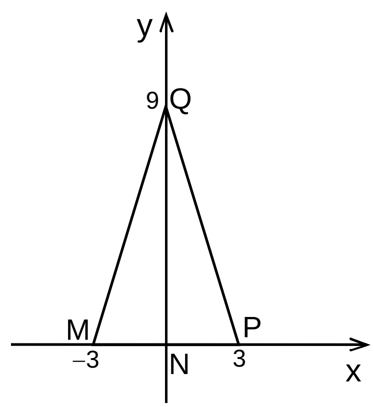
Contenido: Cuerpos generados a partir de traslaciones de figuras planas en el espacio

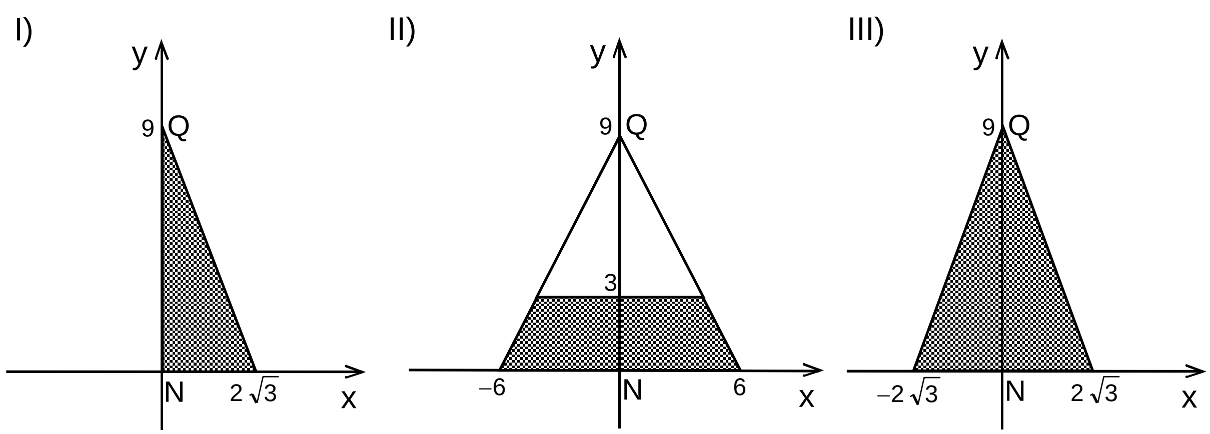
Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: B

PREGUNTA 57

En la figura adjunta el triángulo MPQ es isósceles de base 6 unidades y altura $\overline{QN}$ de 9 unidades. Si el triángulo gira indefinidamente en torno a $\overline{QN}$ se origina un cuerpo de volumen V. ¿Con cuál(es) de las siguientes regiones achuradas se obtiene un cuerpo de volumen $\frac{4V}{3}$ si se hacen girar indefinidamente en torno a $\overline{QN}$?





A) Solo con I

B) Solo con III

C) Solo con I y con III

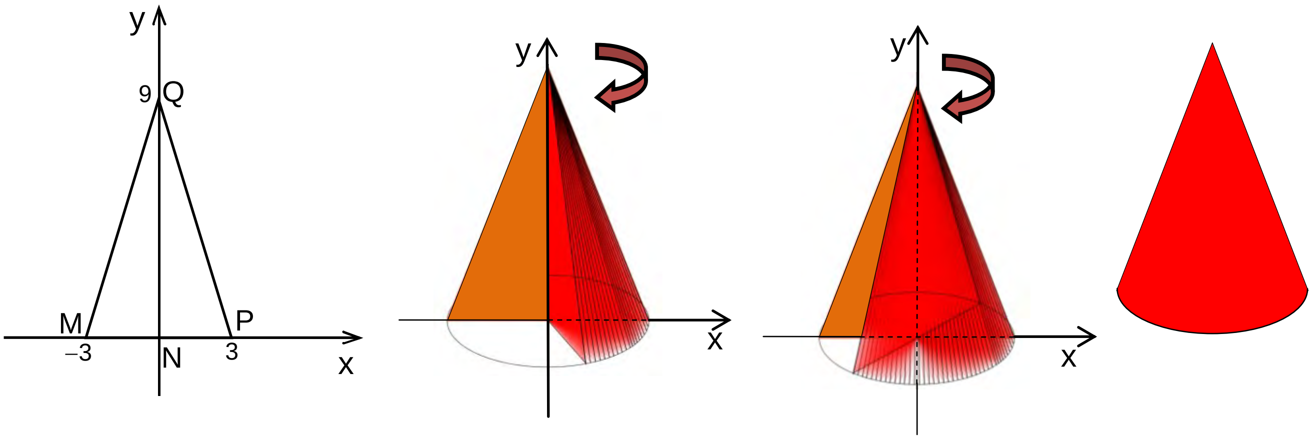
D) Solo con II y con III

E) Con I, con II y con III

RESOLUCIÓN

En esta pregunta se debe encontrar el volumen de los cuerpos generados en I), en II) y en III) y comprobar si corresponden a los $\frac{4}{3}$ del volumen del cuerpo generado al hacer girar el triángulo isósceles MPQ en torno a $\overline{QN}$.

Así, si se hace girar indefinidamente el triángulo MPQ en torno a $\overline{QN}$ se obtiene un cono de radio basal 3 unidades y altura 9 unidades, como se muestra a continuación:



Recuerde que:

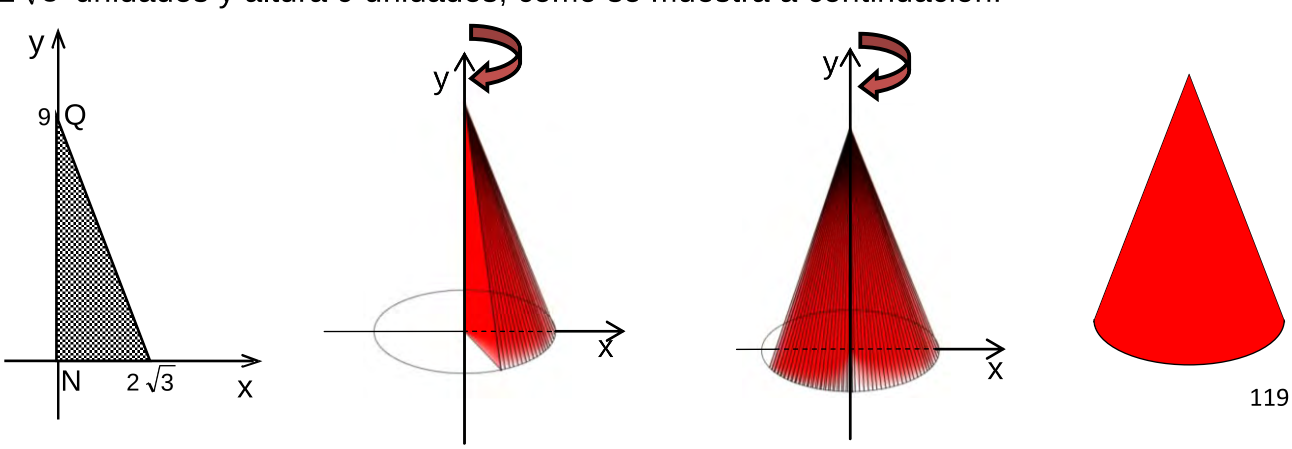
el **volumen** V de un **cono** de radio basal r y altura h se calcula a través de la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$.

Luego, reemplazando las medidas del cono en la fórmula se tiene:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 9 = 27\pi \text{ unidades cúbicas}$$

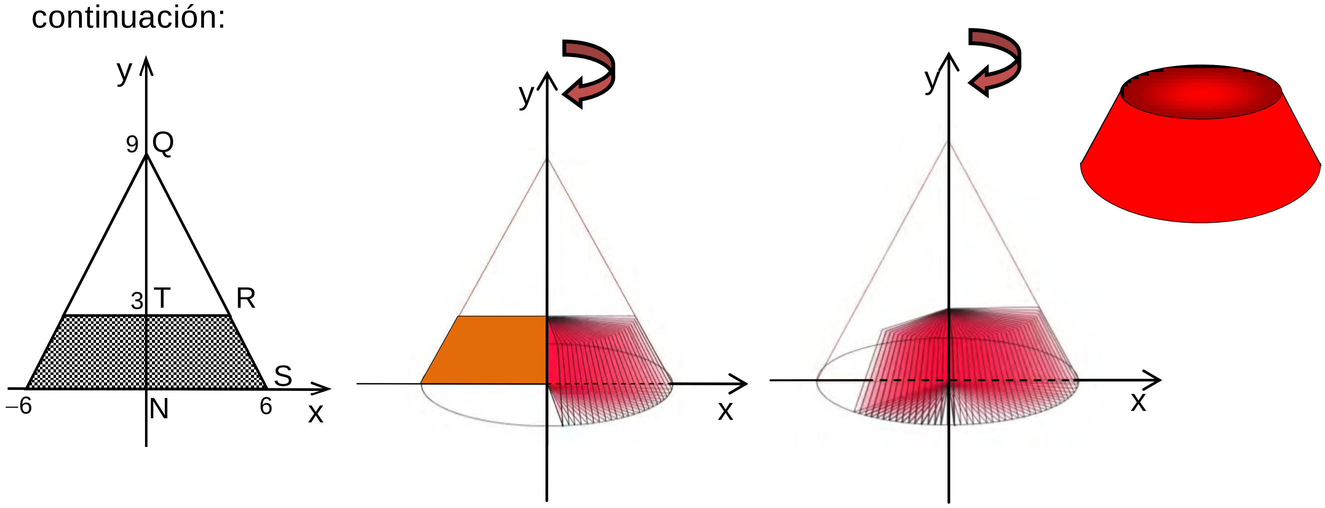
de donde $\frac{4V}{3} = 36\pi$ unidades cúbicas.

En I) se tiene que la región achurada es un triángulo rectángulo que si se hace girar indefinidamente en torno a $\overline{QN}$, también se obtiene un cono, con un radio basal de $2\sqrt{3}$ unidades y altura 9 unidades, como se muestra a continuación:



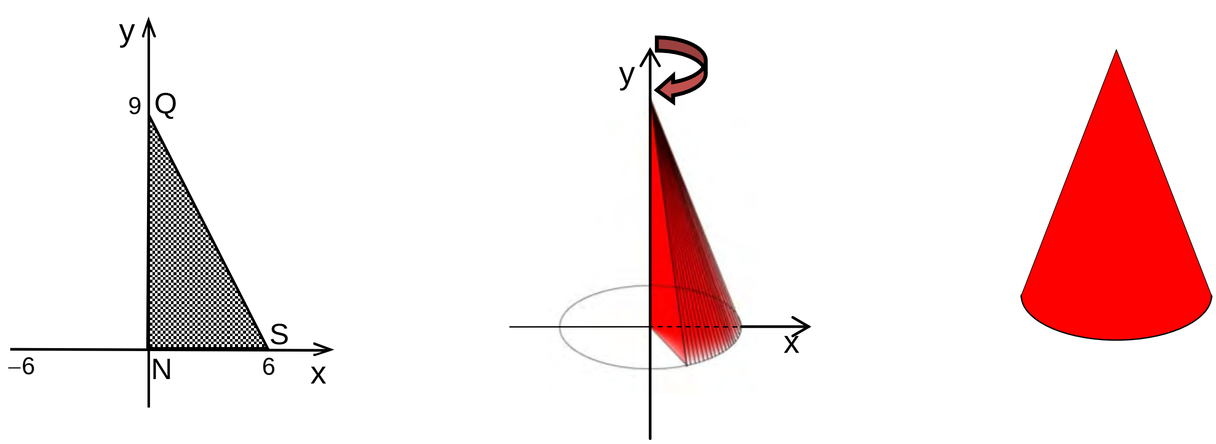
Si se calcula su volumen, se obtiene $\frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2 \cdot 9 = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 3 \cdot 9 = 36\pi$ unidades cúbicas, medida que es igual a $\frac{4V}{3}$.

En II), si por ejemplo, la región achurada es un trapecio isósceles y se hace girar indefinidamente en torno a $\overline{QN}$ se obtiene un tronco de cono, como se muestra a continuación:



Una manera de determinar el volumen del tronco de cono es, calculando el volumen del cuerpo generado al hacer girar indefinidamente el triángulo NSQ en torno a $\overline{QN}$, luego calcular el volumen del cuerpo generado al hacer girar indefinidamente el triángulo TRQ en torno a $\overline{TQ}$, para al final restar al volumen del cono mayor el volumen del cono menor.

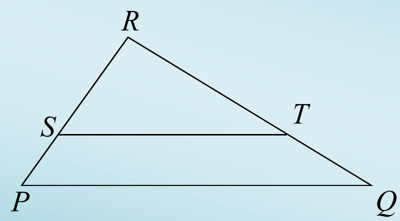
Así, del triángulo NSQ se obtiene un cono de radio basal 6 unidades y altura 9 unidades, como se muestra en la siguiente figura:



Luego, su volumen es $\frac{1}{3}\pi(6)^2 \cdot 9 = \frac{1}{3}\pi \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 = 108\pi$ unidades cúbicas.

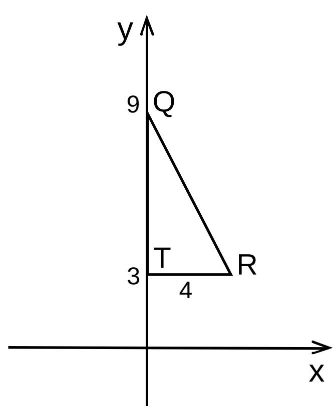
Ahora, para determinar la medida del segmento TR,

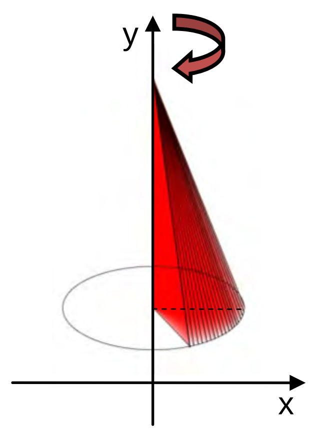
Recuerde que:
al aplicar el **teorema de Thales** al triángulo de la figura, donde $\overline{ST} \parallel \overline{PQ}$, se obtiene la relación $\frac{RS}{RP} = \frac{RT}{RQ} = \frac{ST}{PQ}$.

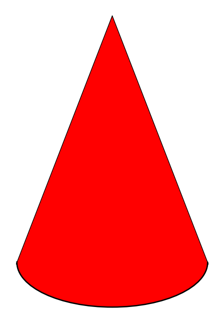


Así, $\frac{QT}{QN} = \frac{TR}{NS}$, reemplazando los valores se tiene que $\frac{9-3}{9} = \frac{TR}{6}$, de donde se obtiene que TR = 4 unidades.

Ahora, al hacer girar indefinidamente el triángulo TRQ en torno a $\overline{TQ}$, se obtiene el siguiente cono:



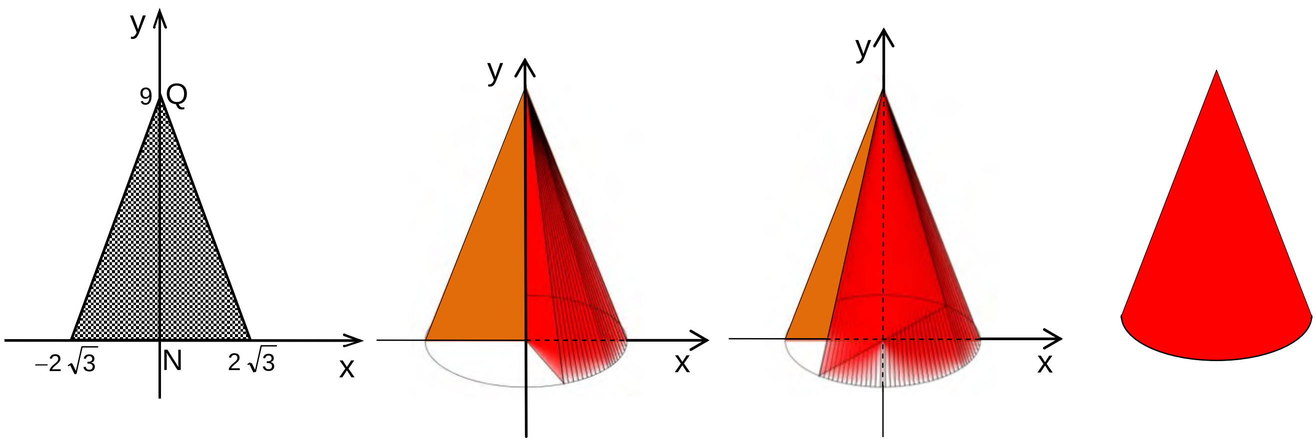




El cono obtenido tiene un radio basal de 4 unidades y una altura de 6 unidades, donde su volumen es $\frac{1}{3}\pi(4)^2 \cdot 6 = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 32\pi$ unidades cúbicas.

A continuación, se resta el volumen mayor con el volumen menor para encontrar el volumen del tronco de cono, esto es, $108\pi - 32\pi = 76\pi$ unidades cúbicas, valor que es distinto a $\frac{4V}{3}$.

Por último, si se hace girar indefinidamente el triángulo isósceles dado en III), se obtiene un cono de radio basal $2\sqrt{3}$ unidades y altura 9 unidades, como se representa a continuación:



Luego, el volumen de este cono es $\frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2 \cdot 9 = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 3 \cdot 9 = 36\pi$ unidades cúbicas medida que es igual a $\frac{4V}{3}$.

Por el desarrollo realizado, se tiene que la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.

Contenido: Volúmenes de cuerpos generados por rotación de figuras planas

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 58

Dos rectas del plano se intersectan en un único punto. Se puede determinar que el sistema de ecuaciones, $\left.\begin{array}{l} 2x + ay = c \\ bx - 3y = d \end{array}\right|$ en las variables x e y, representa esta situación, si se sabe que:

(1) $a \neq b$

(2) $c \neq d$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta al ítem se debe comprobar si con la información dada en el enunciado, más la información dada en (1) y/o en (2) se puede determinar que el sistema dado representa a dos rectas en el plano que se intersectan en un único punto.

Para ello,

> **Recuerde que:**
>
> el sistema $\left.\begin{array}{l} px + qy = k \\ rx + sy = w \end{array}\right|$, en x e y, tiene una única solución cuando $\dfrac{p}{r} \neq \dfrac{q}{s}$.

Usando lo anterior, se debe cumplir en el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x + ay = c \\ bx - 3y = d \end{array}\right|$ que $\dfrac{2}{b} \neq \dfrac{a}{-3}$ para que este sistema represente a dos rectas que se intersectan en un único punto.

Ahora, con la información dada en (1) se tiene que $a \neq b$, pero no es suficiente para determinar que las rectas se intersecten en un único punto, porque si $a = -1$ y $b = 6$, se cumple que $\dfrac{2}{b} = \dfrac{a}{-3} = \dfrac{1}{3}$.

Por otro lado, con la información dada en (2) se tiene que c $\neq$ d, la que también es insuficiente para determinar si las rectas del sistema se intersecten en un único punto, ya que la condición no necesita de los valores de c y d, además nada se dice de a y b.

Si se juntan ambas informaciones, es decir, si a $\neq$ b y c $\neq$ d, no se puede determinar que $\frac{2}{b} \neq \frac{a}{-3}$, porque existen valores para los que se cumple que $\frac{2}{b} = \frac{a}{-3}$, por ejemplo, a = $\frac{1}{2}$ y b = –12, además, no se necesitan condiciones para c y d.

Por lo que la clave es la opción E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Establecer la relación entre la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen.

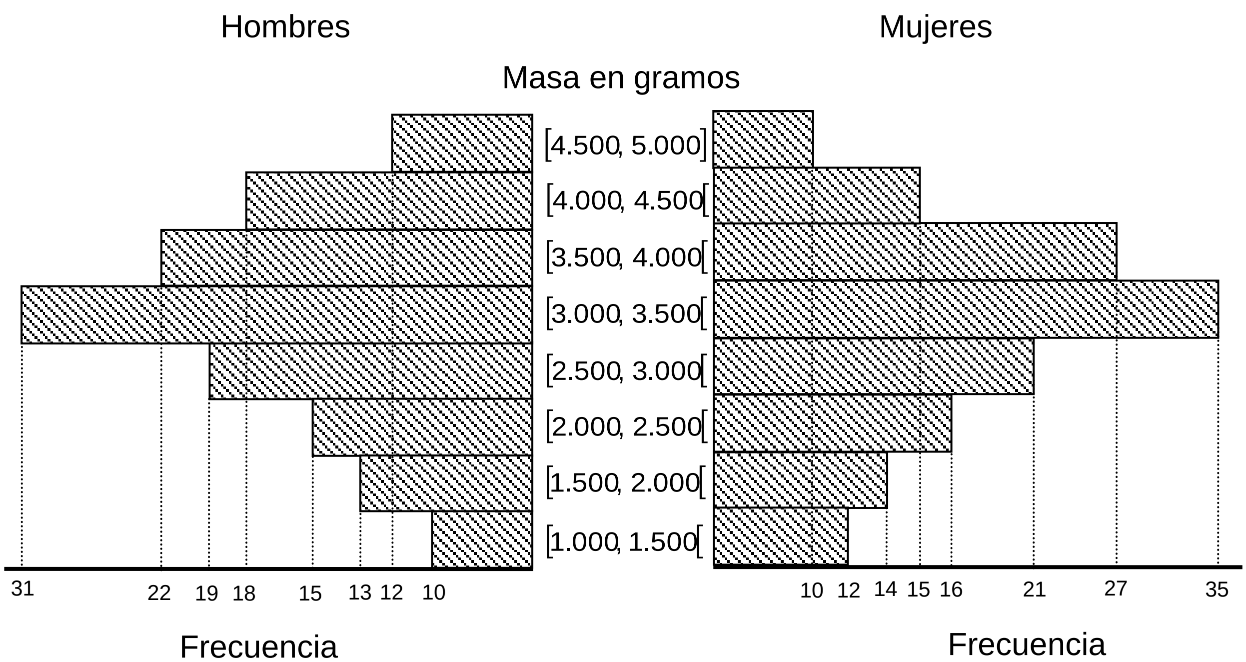
Contenido: Análisis gráfico de las soluciones de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su interpretación a partir de las posiciones relativas de rectas en el plano

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: E

PREGUNTA 59

En el gráfico de la figura adjunta se muestra la distribución de la masa en gramos de los recién nacidos, según sexo, en una clínica de maternidad, durante un año. Si los hombres recién nacidos son 140 y las mujeres recién nacidas son 150, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir a partir de la información entregada?



A) El intervalo modal tanto en mujeres como en hombres, es el mismo.

B) La mediana de las masas de las mujeres y la mediana de las masas de los hombres se encuentra en el mismo intervalo.

C) La masa más frecuente tanto en mujeres como en hombres, es 3.250 gramos.

D) Ocurrieron más nacimientos de mujeres que de hombres en esa clínica durante ese año.

E) 26 mujeres tienen una masa inferior a 2.000 gramos.

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem se debe interpretar los datos dados tanto en el enunciado como en el gráfico y determinar cuál de las afirmaciones en las opciones no se puede deducir de esta información.

Los datos dados en el gráfico se pueden llevar a una tabla, como se muestra a continuación, agregando la columna de las frecuencias acumuladas de los hombres y de las mujeres.

> **Recuerde que:**
> la **frecuencia acumulada** de un intervalo se determina sumando las frecuencias de todos los intervalos inferiores o iguales al considerado.

Masa en gramos	Frecuencia		Frecuencia acumulada	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
[1.000, 1.500[	10	12	10	12
[1.500, 2.000[	13	14	23	26
[2.000, 2.500[	15	16	38	42
[2.500, 3.000[	19	21	57	63
[3.000, 3.500[	31	35	88	98
[3.500, 4.000[	22	27	110	125
[4.000, 4.500[	18	15	128	140
[4.500, 5.000]	12	10	140	150
Total	**140**	**150**		

> **Recuerde que:**
> el **intervalo modal** es el intervalo de mayor frecuencia.

En A) se afirma que el intervalo modal tanto en mujeres como en hombres es el mismo. Esto es verdadero, pues en el intervalo [3.000, 3.500[está la mayor frecuencia de la masa de los hombres (31) y la mayor frecuencia de la masa de las mujeres (35).

> **Recuerde que:**
> la **mediana** de un grupo de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el *50%* de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el *50%* de los valores son mayores o iguales a él.

Ahora, para determinar si se puede deducir la afirmación en B), se usará la columna de la frecuencia acumulada para encontrar el primer intervalo que acumula al menos el 50% de los datos de cada grupo.

Del total de hombres y del total de mujeres, se tiene que el 50% de 140 es 70 y el 50% de 150 es 75, respectivamente. Como en el intervalo $[3.000, 3.500[$ se han acumulado 88 hombres y 98 mujeres, se tiene que la mediana en ambos casos está en este intervalo y no en el anterior, pues en el intervalo $[2.500, 3.000[$ se han acumulado 57 hombres y 63 mujeres. Luego, la afirmación dada en B) es verdadera.

Con respecto a la afirmación dada en C), solo se puede deducir que hay 31 hombres y 35 mujeres que tienen una masa en $[3.000, 3.500[$, pero no se puede deducir que la masa más frecuente en algunos de los dos grupos es 3.250 gramos.

La afirmación dada en D) es verdadera, pues en el enunciado se dice que los hombres recién nacidos son 140 y las mujeres recién nacidas son 150 en esa clínica durante ese año.

Por último, en E) se tiene que hasta el intervalo $[1.500, 2.000[$ se han acumulado 26 mujeres que tienen una masa inferior a 2.000 gramos. Luego, la afirmación en E) es verdadera.

Por el desarrollo anterior, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

Contenido: Obtención de información a partir del análisis de los datos presentados en gráficos, considerando la interpretación de medidas de tendencia central

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: C

PREGUNTA 60

En la tabla adjunta se muestran algunos datos sobre la cantidad de horas de conexión a internet por el total de los estudiantes de un curso durante una semana. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

Horas	Número de estudiantes	Frecuencia relativa porcentual
$[0, 6[$	8	
$[6, 12[$		40%
$[12, 18]$	12	30%
Más de 18	4	

I) El curso tiene 40 estudiantes.

II) Más de la mitad de los estudiantes se conectó a internet a lo más 12 horas.

III) Más de la mitad de los estudiantes se conectó a internet entre 6 y 18 horas, ambos valores incluidos.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta a la pregunta se debe determinar si las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) son verdaderas, para lo cual se puede completar la tabla adjunta.

Recuerde que:

- en una tabla de datos agrupados la **frecuencia** es la cantidad de elementos que se encuentran en un intervalo.
- la **frecuencia relativa** de un intervalo es el cociente entre su frecuencia y el total de datos.
- la **frecuencia relativa porcentual** de un intervalo es su frecuencia relativa multiplicada por *100*.

Así, de la tabla se tiene que 12 estudiantes equivalen al 30% del total (x) de estudiantes del curso, por lo que se puede plantear la ecuación $\frac{12}{x} \cdot 100 = 30$, de donde se obtiene que x = 40 estudiantes.

Con este valor se obtienen los datos faltantes de la tabla, como se muestra a continuación:

Horas	Número de estudiantes	Frecuencia relativa porcentual
$[0, 6[$	8	$\frac{8}{40} \cdot 100 =$ **20%**
$[6, 12[$	40 – 24 = **16**	40%
$[12, 18]$	12	30%
Más de 18	4	$\frac{4}{40} \cdot 100 =$ **10%**
Total	**40**	**100%**

Por los datos obtenidos, se tiene que la afirmación dada en I) es verdadera, pues el curso tiene 40 estudiantes en total.

Para II), se observa que hasta el intervalo $[6, 12[$ hay un 60% de los estudiantes que se conectaron a internet, por lo que más de la mitad de los estudiantes estuvo conectado a internet 12 horas o menos, luego esta afirmación es verdadera.

Por último en III), de la tabla se tiene que un 40% de los estudiantes se conectaron a internet en una cantidad de horas que se encuentra en el intervalo $[6, 12[$ y un 30% de los estudiantes se conectaron a internet en una cantidad de horas que se encuentra en el intervalo $[12, 18]$, por lo tanto, más de la mitad de los estudiantes del curso se conectaron a internet en una cantidad de horas que se encuentra en el intervalo $[6, 18]$. Luego la afirmación en III) es verdadera.

Como las afirmaciones de I), de II) y de III) son verdaderas, se tiene que la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

Contenido: Organización y representación de datos

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 61

En la tabla adjunta se agrupan las estaturas, en cm, de un grupo de personas. Con respecto a los datos de la tabla, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

Estatura (cm)	Frecuencia
$[140, 150[$	17
$[150, 160[$	24
$[160, 170[$	25
$[170, 180[$	10
$[180, 190]$	4

A) La mediana de la estatura se encuentra en $[150, 160[$.

B) El intervalo modal de la estatura es $[160, 170[$.

C) El tercer decil de la estatura se encuentra en $[150, 160[$.

D) El percentil 80 de la estatura se encuentra en $[170, 180[$.

E) Al menos un 20% de la estatura no supera los 150 cm.

RESOLUCIÓN

Para resolver la pregunta se debe evaluar cada una de las afirmaciones dadas en las opciones y determinar cuál de ellas es falsa.

Una manera de resolverla es agregando una columna a la tabla que contiene la frecuencia acumulada de cada intervalo.

> **Recuerde que:**
> la **frecuencia acumulada** de un intervalo se determina sumando las frecuencias de todos los intervalos inferiores o iguales al considerado.

Luego, se tiene la siguiente tabla:

Estatura (cm)	Frecuencia	Frecuencia acumulada
$[140, 150[$	17	17
$[150, 160[$	24	41
$[160, 170[$	25	66
$[170, 180[$	10	76
$[180, 190]$	4	80

> **Recuerde que:**
> la **mediana** de un grupo de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el *50%* de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el *50%* de los valores son mayores o iguales a él.

Ahora, para determinar si la mediana de la estatura se encuentra en $[150, 160[$, afirmación dada en A), se debe encontrar el 50% del total de los datos (80), que corresponde a 40 y ver en qué intervalo está este valor.

En la tabla, se observa en la columna de las frecuencias acumuladas, que hasta el intervalo $[140, 150[$ hay 17 personas y que hasta el intervalo $[150, 160[$ hay 41 personas, luego la mediana se encuentra en este último intervalo. Por lo que esta afirmación es verdadera.

> **Recuerde que:**
> el **intervalo modal** es el intervalo de mayor frecuencia.

Con respecto a la afirmación dada en B), se observa en la tabla que el intervalo $[160, 170[$ es el de mayor frecuencia (25 personas), por lo que este intervalo es el intervalo modal, así la afirmación es verdadera.

Recuerde que:
el **decil D_k**, con $k = 1, 2, \ldots, 9$ de un conjunto de n datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el $10k\%$ de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el $(100 - 10k)\%$ de los valores son mayores o iguales a él.

En C), para determinar el tercer decil de las estaturas, se calcula el 30% del total de personas que es 24. Ahora, al observar la columna de las frecuencias acumuladas, se deduce que hasta el intervalo $[140, 150[$ hay 17 personas y que hasta el intervalo $[150, 160[$ hay 41 personas, luego en este último intervalo se encuentra el tercer decil, así la afirmación en C) es verdadera.

Recuerde que:
el **percentil *P*** de un conjunto de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el $P\%$ de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el $(100 - P)\%$ de los valores son mayores o iguales a él.

A continuación, en D) se afirma que el percentil 80 de las estaturas se encuentra en $[170, 180[$, afirmación que es falsa, pues el 80% del total de personas es 64 y hasta el intervalo $[160, 170[$ hay 66 personas, luego el percentil 80 no se encuentra en $[170, 180[$.

Por último, en E) se afirma que al menos un 20% de las estaturas no supera los 150 cm, quiere decir, que existe por lo menos un 20% de las personas que tiene a lo más una estatura de 150 cm. Si se calcula a qué porcentaje corresponde 17 personas del intervalo $[140, 150[$ se tiene que es un 21%, aproximadamente. Por lo tanto, la afirmación en E) es verdadera.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

Contenido: Medidas de posición

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 62

¿Cuántas muestras distintas de tamaño 2 se pueden extraer de una población de 6 elementos distintos entre sí, si las extracciones se hacen sin reemplazo y con orden?

A) 12

B) 64

C) 30

D) 36

E) 3

RESOLUCIÓN

Para determinar cuántas muestras distintas de tamaño 2 se pueden extraer de una población de 6 elementos distintos entre sí, sin reposición y con orden,

> **Recuerde que:**
>
> - el **total de muestras distintas**, sin reposición y con orden, de tamaño k que se pueden extraer desde una población de m elementos es $V_k^m = \dfrac{m!}{(m-k)!}$.
> - el **factorial de un número p**, que corresponde al producto de los primeros p números enteros positivos consecutivos es $p! = p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot\ldots\cdot 1$.

Ahora bien, al reemplazar k = 2 y m = 6 en la fórmula se tiene:

$$
\begin{aligned}
V_2^6 &= \frac{6!}{(6-2)!} \\
&= \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!} \\
&= 30
\end{aligned}
$$

Valor que se encuentra en C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Comprender la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población.

Contenido: Determinación del número de muestras de un tamaño dado, que se pueden extraer desde una población de tamaño finito, sin reemplazo y con orden

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 63

Sean 5,0; 4,5; 5,5; 6,0; 4,0, los promedios de las notas de 5 estudiantes del curso A y sean 7,0; 4,0; 3,0; 5,0; 6,0, los promedios de las notas de 5 estudiantes del curso B. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El rango de los promedios de las notas de los 5 estudiantes de ambos cursos es el mismo.

II) La desviación estándar de los promedios de las notas de los 5 estudiantes del curso A es menor que la desviación estándar de los promedios de las notas de los 5 estudiantes del curso B.

III) La mediana de los promedios de las notas de los 5 estudiantes del curso A es igual a la media aritmética de los promedios de las notas de los 5 estudiantes del curso B.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) Solo I y III

E) Solo II y III

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem se debe determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III).

Para determinar si la afirmación dada en I) es verdadera, recuerde que:

> el **rango** de un conjunto de datos es la diferencia positiva entre el valor máximo y el valor mínimo de los datos.

Ahora, para encontrar el rango de los promedios de las notas de los 5 estudiantes de cada uno de los cursos, se puede ordenar cada grupo de notas de menor a mayor, para identificar el promedio mayor y el promedio menor de los estudiantes de ambos cursos. Así, se tiene lo siguiente:

Curso A	Curso B
4,0	3,0
4,5	4,0
5,0	5,0
5,5	6,0
6,0	7,0

Curso A: Promedio menor 4,0; Promedio mayor 6,0; Rango: 6,0 – 4,0 = **2,0**

Curso B: Promedio menor 3,0; Promedio mayor 7,0; Rango: 7,0 – 3,0 = **4,0**

Como el rango de los promedios de los 5 estudiantes del curso A es distinto al rango de los promedios de los 5 estudiantes del curso B, se tiene que la afirmación dada en I) es falsa.

En relación a la afirmación dada en II), se puede calcular la desviación estándar de los promedios de las notas de los 5 estudiantes de cada curso y comparar los resultados.

> **Recuerde que:**
>
> - la **media aritmética** de un conjunto de datos, corresponde a la suma de todos los datos divididos por el total de datos.
>
> - para calcular la **desviación estándar** de los datos de una población se puede aplicar la fórmula $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}$, donde σ es la desviación estándar de los n datos x_i (con $i = 1, 2, 3, \ldots, n$) y $\overline{x}$ es el promedio de los n datos, x_i.

Por lo anterior, la media aritmética de los promedios de las notas de los 5 estudiantes de cada curso es:

Curso A: $\overline{x_A} = \dfrac{4{,}0 + 4{,}5 + 5{,}0 + 5{,}5 + 6{,}0}{5} = 5{,}0$

Curso B: $\overline{x_B} = \dfrac{7{,}0 + 4{,}0 + 3{,}0 + 5{,}0 + 6{,}0}{5} = 5{,}0$

Luego, se aplica la fórmula de la desviación estándar obteniendo lo siguiente:

$$\text{Curso A: } \sigma_A = \sqrt{\frac{(4{,}0-5{,}0)^2+(4{,}5-5{,}0)^2+(5{,}0-5{,}0)^2+(5{,}5-5{,}0)^2+(6{,}0-5{,}0)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-1)^2+(-0{,}5)^2+(0)^2+(0{,}5)^2+(1)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+0{,}25+0{,}25+1}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{2{,}5}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Curso B: } \sigma_B = \sqrt{\frac{(3{,}0-5{,}0)^2+(4{,}0-5{,}0)^2+(5{,}0-5{,}0)^2+(6{,}0-5{,}0)^2+(7{,}0-5{,}0)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-2)^2+(-1)^2+(0)^2+(1)^2+(2)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{4+1+1+4}{5}}$$

$$= \sqrt{2}$$

De lo anterior, se tiene $\sqrt{\dfrac{1}{2}} < \sqrt{2}$, de donde se concluye que la afirmación dada en II) es verdadera.

Por último, para determinar si es verdadero que la mediana de los promedios de las notas de los 5 estudiantes del curso A es igual a la media aritmética de los promedios de las notas de los 5 estudiantes del curso B, recuerde que:

> la **mediana** de un grupo de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el *50%* de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el *50%* de los valores son mayores o iguales a él.

Luego,

	Curso A
	4,0
	4,5
Mediana →	5,0
	5,5
	6,0

Anteriormente, se obtuvo que la media aritmética de los promedios de las notas de los estudiantes del curso B es 5,0 valor que es igual a la mediana de los promedios de las notas de los estudiantes del curso A, por lo tanto, la afirmación dada en III) es verdadera.

Como las afirmaciones de II) y de III) son verdaderas, se tiene que la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Datos

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.

Contenido: Análisis de las características de dos o más muestras de datos.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 64

Si en un grupo de datos, la media aritmética, la moda y la mediana son iguales, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) Los datos son iguales.
II) La desviación estándar es 0.
III) El grupo está formado por un solo dato.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y III
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta a esta pregunta se debe determinar si las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) son siempre verdaderas.

Recuerde que:

- la **media aritmética** de un conjunto de datos, no agrupados, corresponde a la suma de todos los datos divididos por el total de datos.
- la **moda** de un conjunto de datos es el valor que tiene mayor frecuencia.
- la **mediana** de un grupo de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el 50% de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el 50% de los valores son mayores o iguales a él.

Si se considera el grupo de datos 4, 5, 5, 5 y 6, se tiene que la media aritmética, la moda y la mediana son 5.

Por lo anterior, las afirmaciones dadas en I) y en III) son falsas, pues se tiene que los datos del grupo no son todos iguales y además, el grupo no está formado por un solo dato.

La afirmación dada en II) no es siempre verdadera, pues para que la desviación estándar sea cero todos los datos deben ser iguales entre sí y en el ejemplo anterior esto no se cumple.

Por el desarrollo anterior se llega a que la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Datos

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.

Contenido: Desviación estándar

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: E

PREGUNTA 65

En las tablas adjuntas se muestran los resultados obtenidos en dos muestras para la variable M, con $p < q < r$. Si m es la media aritmética de la muestra A y n es la media aritmética de la muestra B y las medianas de las muestras A y B son s y t, respectivamente, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

Muestra A	
Variable M	Frecuencia
p	3
q	5
r	4

Muestra B	
Variable M	Frecuencia
p	5
q	3
r	4

A) $m > n$, $s = t$

B) $m > n$, $s < t$

C) $m < n$, $s > t$

D) $m < n$, $s = t$

E) $m = n$, $s = t$

RESOLUCIÓN

Una manera de responder la pregunta es escribir todos los datos de la muestra A y de la muestra B, de menor a mayor, para comparar la mediana y la media aritmética de las muestras.

Recuerde que:

- la **mediana** de un grupo de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el *50%* de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el *50%* de los valores son mayores o iguales a él.
- la **media aritmética** de un conjunto de datos no agrupados es igual a la suma de todos los datos dividido por la cantidad total de datos.

Debido a que p < q < r, los datos de la muestra A y B se pueden escribir de menor a mayor, de la siguiente manera:

Muestra A → p p p q q q q q r r r r

p p p p p q q q r r r r ← Muestra B

Debido a que la cantidad total de datos en ambas muestras es 12, la mediana se encuentra entre el dato que está en la posición 6 y la posición 7, tal como se muestra a continuación:

Muestra A → p p p q q $\boxed{q}$ $\boxed{q}$ q r r r r

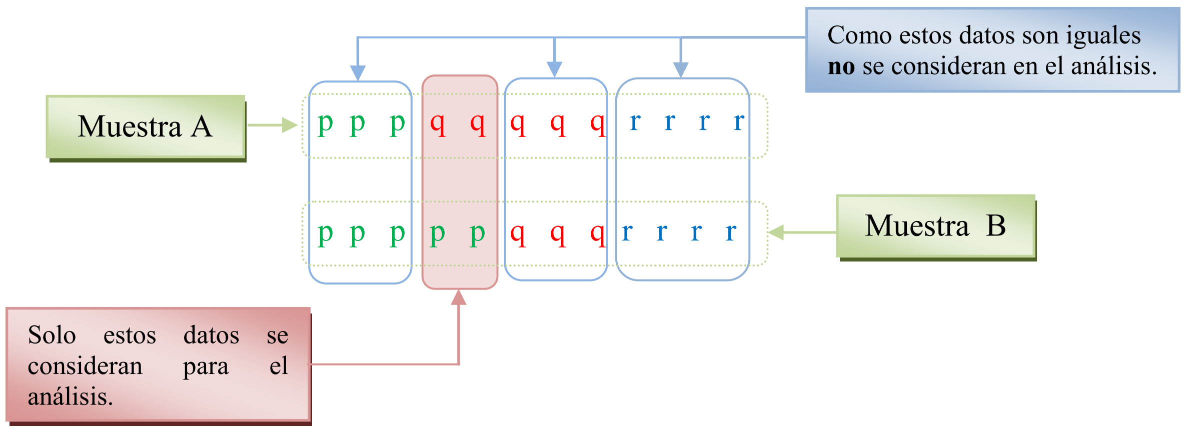
p p p p p $\boxed{q}$ $\boxed{q}$ q r r r r ← Muestra B

Dato en la posición 6

Dato en la posición 7

Como el dato de la posición 6 y el dato de la posición 7 es q en ambas muestras, se tiene que la mediana en ambas muestras es q, luego se cumple que s = t.

Para comparar la media aritmética de los datos de las muestras basta comparar solamente la suma de sus datos, ya que ambos grupos tienen la misma cantidad de datos. Así, se obtiene lo siguiente:



Como q > p se tiene que q + q > p + p, luego la suma de los datos de la muestra A es mayor que la suma de los datos de la muestra B, por lo que la media aritmética de los datos de la muestra A es mayor que la media aritmética de los datos de la muestra B, es decir, m > n.

De esta manera, se concluye que la clave es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.

Contenido: Comparación de dos muestra mediante medidas de tendencia central

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: A

PREGUNTA 66

En un curso de 50 estudiantes, se escogen al azar 5 de ellos, cuyas estaturas, en cm, son: 150, 155, 160, 160 y 165. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones se puede(n) deducir de esta información?

I) El promedio de las estaturas de los 50 estudiantes es 158 cm.

II) La mitad de los estudiantes del curso mide más de 160 cm.

III) La estatura de, exactamente, el 10% de los estudiantes del curso se ubica en el intervalo $[150, 165]$.

A) Solo I

B) Solo I y II

C) Solo I y III

D) Solo II y III

E) Ninguna de ellas

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe determinar si las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) se pueden deducir a partir de la información del enunciado.

> **Recuerde que:**
> el **promedio** de un conjunto de datos no agrupados es igual a la suma de todos los datos dividido por la cantidad total de datos.

En I) se afirma que el promedio de las estaturas de los 50 estudiantes es 158 cm, esto no se puede deducir del enunciado, pues, por ejemplo, si se considera que 45 estudiantes de los 50 miden 180 cm, el promedio sería el siguiente:

$$\text{Promedio} = \frac{150 + 155 + 160 + 160 + 165 + 45 \cdot 180}{50} = \frac{8.890}{50} = 177{,}8$$

En II) se afirma que la mitad de los estudiantes del curso mide más de 160 cm. Del enunciado se tiene información de solo 5 estudiantes del total, pero no se tiene información de la estatura de los 45 estudiantes restantes del curso, por lo que estos pueden tener una estatura de, por ejemplo, 155 cm, luego no se puede deducir la afirmación en II).

En III) no se puede deducir que exactamente el 10% de los estudiantes se encuentren en el intervalo $[150, 165]$, puesto que si se considera, al igual que en II), que el resto de estudiantes tienen una estatura de 155 cm, el 100% de los estudiantes estaría en el intervalo $[150, 165]$.

Así, de una muestra de 5 estudiantes de un curso no se pueden deducir las afirmaciones dadas en relación a las estaturas del total de estudiantes del curso, por lo que la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender que la media muestral de pruebas independientes de un experimento aleatorio se aproxima a la media de la población a medida que el número de pruebas crece.

Contenido: Muestra

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: E

PREGUNTA 67

La vida útil, en años, de cierto dispositivo electrónico se modela mediante una distribución normal con media μ años y desviación estándar 0,2 años. Se extrae al azar una muestra de 400 dispositivos electrónicos. Si se considera un intervalo de confianza para μ, con un nivel de confianza del 90%, ¿cuál es el margen de error para μ?

A) $1{,}64 \cdot \dfrac{0{,}2}{\sqrt{400}}$

B) $1{,}64 \cdot \dfrac{0{,}2}{400}$

C) $1{,}28 \cdot \dfrac{0{,}2}{\sqrt{400}}$

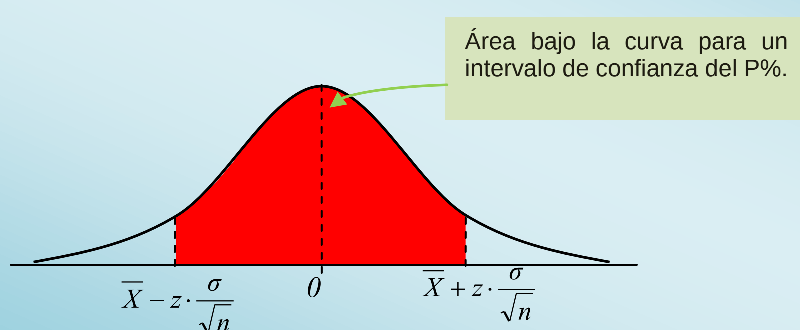
D) $1{,}28 \cdot \dfrac{0{,}2}{400}$

E) $0{,}9 \cdot \dfrac{0{,}2}{\sqrt{400}}$

RESOLUCIÓN

Para responder esta pregunta se puede definir la variable aleatoria continua X como la vida útil, en años, del dispositivo electrónico. Luego, se debe estandarizar el promedio de la muestra y calcular el error del intervalo de confianza para μ, para esto se debe recordar que:

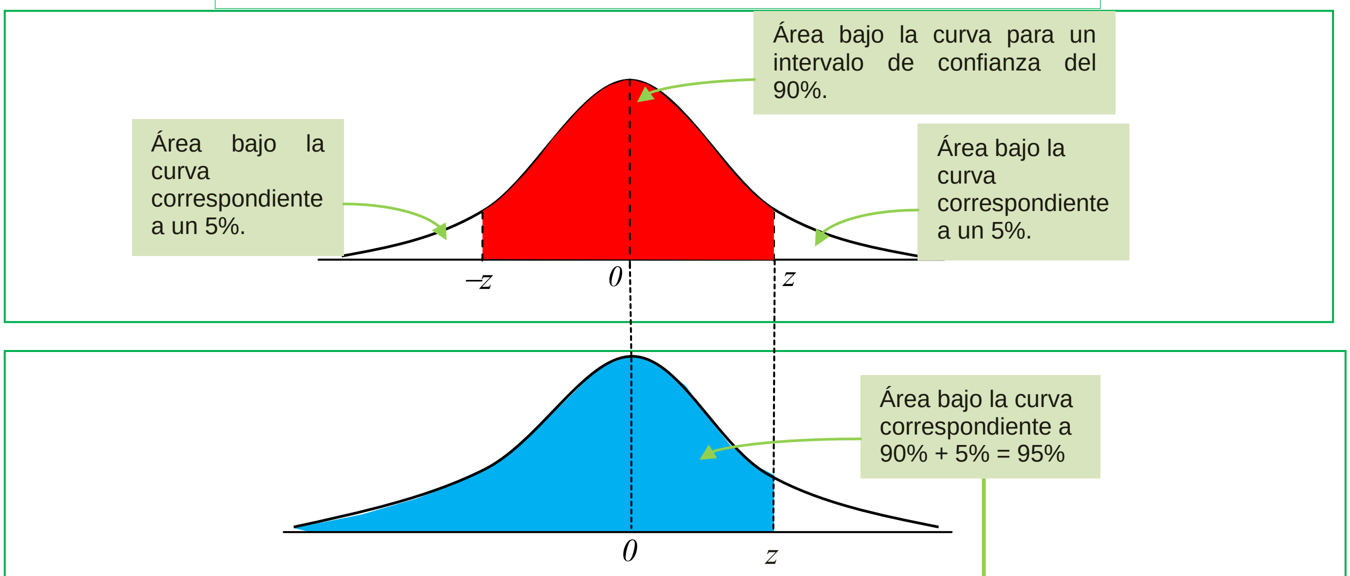
si $\left[\overline{X} - z \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + z \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ es un intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza del $P\%$ con σ conocido, entonces el margen de error para este intervalo es $z \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.



Como del enunciado se tiene que n = 400 y σ = 0,2, entonces el margen de error para μ es $z \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{400}}$.

Para determinar el valor de z, se puede utilizar la tabla que se encuentra en las instrucciones de la contratapa de este modelo, tal como se muestra a continuación:

Gráfica de la función densidad de Z, cuando Z ~ N(0, 1)



z	P(Z ≤ z)
0,67	0,749
0,99	0,839
1,00	0,841
1,15	0,875
1,28	0,900
1,64	0,950
1,96	0,975
2,00	0,977
2,17	0,985
2,32	0,990
2,58	0,995

95% se busca en la tabla como 0,950.

De la tabla se obtiene z = 1,64, luego el margen de error para μ es $1{,}64 \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{400}}$, valor que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Argumentar acerca de la confiabilidad de la estimación de la media de una población con distribución normal, a partir de datos muestrales.

Contenido: Intervalos de confianza

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: A

PREGUNTA 68

En una población de 30.000 estudiantes, los puntajes obtenidos en un test se modelan a través de una distribución normal con media de 500 puntos y desviación estándar de 100 puntos. ¿Cuál de los siguientes números es la mejor aproximación de la cantidad de estudiantes que rinden el test y que logran un puntaje mayor que 696 puntos?

A) 12.000
B) 750
C) 690
D) 29.250
E) 28.500

RESOLUCIÓN

Para responder la pregunta se puede definir la variable aleatoria continua X como el puntaje obtenido por los estudiantes en un test para determinar el porcentaje estudiantes de la población que logran un puntaje mayor que 696 puntos.

Recuerde que:

si X es una **variable aleatoria continua** tal que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable aleatoria $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ tiene distribución normal $(0, 1)$, es decir, $Z \sim N(0, 1)$, por lo que se cumple que $P(X > x) = P\left(Z > \dfrac{x - \mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{x - \mu}{\sigma}\right)$.

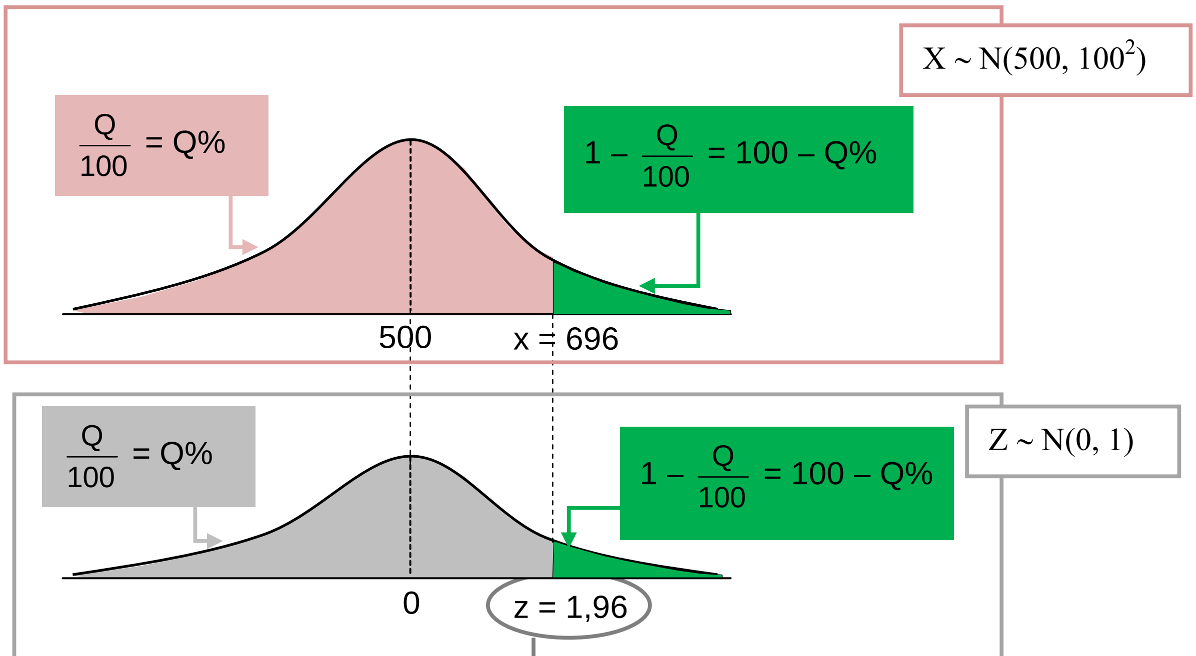
De los datos del enunciado se tiene que μ = 500, σ = 100 y x = 696, luego se debe determinar P(X > 696), es decir,

$$P(X > 696) = P\left(Z > \frac{696 - 500}{100}\right)$$

$$= P(Z > 1{,}96)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}96)$$

De esta forma, se puede utilizar la tabla de las instrucciones de la contratapa de este modelo, tal como se muestra a continuación, donde la zona de color verde es el porcentaje que se está buscando:



z	P(Z ≤ z)
---	---
1,64	0,950
1,96	0,975
2,00	0,977
---	----

De la tabla se determina que P(Z ≤ 1,96) = 0,975, luego

$$P(X > 696) = 1 - P(Z \leq 1{,}96) = 1 - 0{,}975 = 0{,}025$$

Así, el porcentaje de estudiantes que tiene un puntaje mayor a 696 puntos es 100 · 0,025 = 2,5%, luego, la cantidad de estudiantes que tiene un puntaje mayor a 696 puntos corresponde al 2,5% de 30.000, es decir, 750 estudiantes, por lo que la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Evaluar críticamente información estadística extraída desde medios de comunicación, tales como periódicos, artículos de revistas o desde Internet.

Contenido: Distribución normal

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 69

En la tabla adjunta se muestran las edades de un grupo de personas agrupadas en intervalos. Se puede determinar el valor de r de la tabla, si se sabe que:

Datos	Frecuencia
$[10, 20[$	5
$[20, 30[$	7
$[30, 40[$	15
$[40, 50[$	r
$[50, 60]$	8

(1) La mediana está en el intervalo $[40, 50[$.

(2) r es la frecuencia del intervalo modal.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem se debe analizar si con la información dada en (1) y/o en (2) se puede determinar el valor de r que está en la tabla.

Recuerde que:

- la **mediana** de un grupo de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el *50%* de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el *50%* de los valores son mayores o iguales a él.
- el **intervalo modal** es el intervalo de mayor frecuencia.

La información entregada en (1) no permite encontrar un único valor para r, por ejemplo, r puede ser igual a 30 ó 31 ó 50, porque si r tiene algunos de estos valores cumple con que la mediana está en el intervalo $[40, 50[$.

En (2) se indica que r es la frecuencia del intervalo modal, con lo cual r puede ser cualquier valor mayor que 15. Luego, con esta información no se puede determinar el valor de r.

Ahora, juntando ambas informaciones, tampoco se puede determinar un único valor de r, pues si r, por ejemplo, es 30 ó 31 ó 50 se cumple que $[40, 50[$ es el intervalo modal y la mediana pertenece a este intervalo.

De esta forma, la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

Contenido: Medidas de tendencia central

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar, evaluar

Clave: E

PREGUNTA 70

En una bolsa hay 10 fichas del mismo tipo, numeradas correlativamente del 0 al 9. Si de la bolsa se saca una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta tenga un número primo?

A) $\frac{5}{9}$

B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{2}{5}$

RESOLUCIÓN

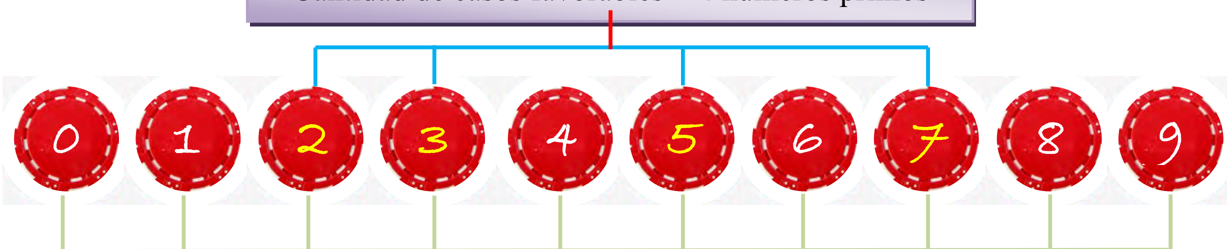
Para responder la pregunta se debe utilizar la regla de Laplace, para ello se debe recordar que:

la probabilidad de ocurrencia de un suceso en el modelo de Laplace es igual a

$$\frac{\textit{Cantidad de casos favorables}}{\textit{Cantidad de casos posibles}}$$

Del enunciado se obtiene lo siguiente:

Cantidad de casos favorables = 4 números primos



Cantidad de casos posibles = 10 números del 0 al 9

Por lo tanto, si se extrae una ficha de la bolsa, entonces la probabilidad de que tenga un número primo se calcula como se muestra a continuación:

$$\frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Por lo tanto, la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Seleccionar la forma de obtener la probabilidad de un evento, ya sea en forma teórica o experimentalmente, dependiendo de las características del experimento aleatorio.

Contenido: Regla de Laplace

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 71

Se tienen 9 letras diferentes. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, es posible formar con estas 9 letras, sin que se repita ninguna letra, si estas palabras están formadas por al menos 2 letras o a lo más 4 letras?

A) $3! \cdot \binom{9}{3}$

B) $\binom{9}{3}$

C) $\binom{9}{2}\binom{9}{3}\binom{9}{4}$

D) $2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \binom{9}{2}\binom{9}{3}\binom{9}{4}$

E) $2! \cdot \binom{9}{2} + 3! \cdot \binom{9}{3} + 4! \cdot \binom{9}{4}$

RESOLUCIÓN

Para responder la pregunta se debe determinar la cantidad de palabras distintas, con y sin sentido, que se pueden formar con 2 letras, más las palabras, con o sin sentido, que se pueden formar con 3 letras, más la cantidad de palabras, con o sin sentido, que se pueden formar con 4 letras, sin que se repita ninguna letra.

Recuerde que:
la cantidad total de ordenamientos distintos de k elementos que se pueden formar de n elementos distintos es $\dfrac{m!}{(m-k)!} = k!\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Como la cantidad de letras distintas es 9, se tiene que n = 9, luego:

- Si k = 2, entonces la cantidad de palabras distintas, con y sin sentido, que se pueden formar con 2 letras es $2!\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Si k = 3, entonces la cantidad de palabras distintas, con y sin sentido, que se pueden formar con 3 letras es $3!\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Si k = 4, entonces la cantidad de palabras distintas, con y sin sentido, que se pueden formar con 4 letras es $4!\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, la cantidad total de palabras que se pueden formar por al menos 2 letras y a lo más 4 letras, sin que se repita ninguna, es $2!\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} + 3!\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} + 4!\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$. Siendo de esta forma la clave E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia.

Contenido: Técnicas combinatorias

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: E

PREGUNTA 72

En el experimento de lanzar un dado común tres veces se define la variable aleatoria discreta X como la cantidad de números pares obtenidos. ¿Cuál de los siguientes conjuntos corresponde al recorrido de X?

A) $\{2, 4, 6\}$

B) $\{0, 1, 2, 3\}$

C) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

D) $\{0, 1\}$

E) $\{1, 2, 3\}$

RESOLUCIÓN

Para determinar el recorrido de la variable aleatoria, se debe determinar la cantidad de números pares que se pueden obtener al lanzar un dado común tres veces. De esta manera se tiene lo siguiente:

al lanzar tres veces un dado común se puede obtener	Valor de X
cero números pares	0
un número par	1
dos números pares	2
tres números pares	3

Por lo tanto, el recorrido de X es $\{0, 1, 2, 3\}$, siendo la clave B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

Contenido: Variable aleatoria discreta

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: B

PREGUNTA 73

Una librería tiene 50 copias de un libro. Si la probabilidad de vender cualquiera de las copias del libro en un mes es 0,35 y estas ventas son independientes entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que vendan exactamente 15 copias del libro en un mes?

A) $\binom{50}{15} \cdot (0{,}35)^{15} \cdot (0{,}65)^{50}$

B) $\binom{50}{15} \cdot (0{,}35)^{15} \cdot (0{,}65)^{35}$

C) $\binom{35}{15} \cdot (0{,}35)^{15} \cdot (0{,}65)^{35}$

D) $\binom{50}{15} \cdot (0{,}35)^{35} \cdot (0{,}65)^{15}$

E) $\binom{50}{15} \cdot (0{,}35)^{15}$

RESOLUCIÓN

Del enunciado se tiene que hay 50 copias de un libro y la probabilidad de vender cualquiera de las copias en un mes es 0,35, siendo las ventas independientes entre sí. Luego para resolver esta pregunta se puede utilizar el modelo binomial.

Recuerde que:
en un **modelo binomial**, al repetirse de manera independiente N veces un experimento aleatorio con resultados dicotómicos (éxito o fracaso), se tiene que, si la probabilidad de tener éxito en el experimento es p y la probabilidad de tener fracaso en el mismo experimento es $q = 1 - p$, entonces la probabilidad de obtener exactamente k éxitos, en las N repeticiones, con $0 \leq k \leq N$, está dada por la expresión:

$$\binom{N}{k} p^k \cdot q^{N-k}$$

Sea N la cantidad de copias de un libro en la librería, k la cantidad de copias del libro que exactamente se vendan, p la probabilidad de que se venda una copia del libro y q = (1 – p) la probabilidad de que no se venda una copia del libro.

Así, N = 50, k = 15, p = 0,35 y q = 0,65.

Luego, la probabilidad de que se vendan exactamente 15 libros se puede expresar como:

$$\binom{N}{k} p^k \cdot q^{N-k} = \binom{50}{15} \cdot (0{,}35)^{15} \cdot (0{,}65)^{50-15} = \binom{50}{15} \cdot (0{,}35)^{15} \cdot (0{,}65)^{35}$$

Valor que se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Aplicar el concepto de modelo probabilístico para describir resultados de experimentos binomiales.

Contenido: Modelo binomial

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: B

PREGUNTA 74

En la tabla adjunta se muestran algunos valores de la función de distribución de probabilidad acumulada de una variable aleatoria discreta X, cuyo recorrido es $\{0, 1, 3, 4\}$. ¿Cuál de las siguientes igualdades es **FALSA**?

k	$P(X \leq k)$
0	0,2
1	0,4
3	0,8
4	1,0

A) $P(X = 0) = P(X = 1)$

B) $P(X = 3) = 0{,}4$

C) $P(X \leq 1) = P(X = 3)$

D) $P(X \geq 3) = 0{,}6$

E) $P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}6$

RESOLUCIÓN

Una forma de resolver este ítem es determinar la función de probabilidad de X, para luego establecer cuál de las igualdades en las opciones es falsa.

Recuerde que:
si X es una variable aleatoria discreta con recorrido $\{x_1, x_2, x_3, x_4,..., x_n\}$, donde n es un número entero positivo y su **función de distribución de probabilidad acumulada** es $P(X \le x)$, entonces se cumple lo siguiente:

$P(X \le x_1) = P(X = x_1)$
$P(X \le x_2) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$
$P(X \le x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3)$
$P(X \le x_4) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4)$
...
$P(X \le x_n) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) + ... + P(X = x_n) = 1$

Ahora, se puede construir la siguiente tabla:

k	P(X ≤ k)	P(X = k)
0	0,2	**0,2**
1	0,4	0,4 – 0,2 = **0,2**
3	0,8	0,8 – 0,4 = **0,4**
4	1,0	1,0 – 0,8 = **0,2**

De la tabla se observa que:

- P(X = 0) = P(X = 1) = 0,2, por lo que la igualdad en A) es verdadera.
- P(X = 3) = 0,4, por lo que la igualdad en B) es verdadera.
- P(X ≤ 1) = 0,4 y P(X = 3) = 0,4, por lo que la igualdad en C) es verdadera.
- P(X ≥ 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,4 + 0,2 = 0,6, por lo que la igualdad en D) es verdadera.
- P(X = 0) + P(X = 1) = 0,2 + 0,2 = 0,4, por lo que la igualdad en E) es falsa.

De lo anterior, la opción E) es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios

Contenido: Función de distribución de probabilidad acumulada

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 75

Cada uno de 64 estudiantes, independientemente uno del otro, lanzará un dado común y una moneda. ¿Cuál es el valor esperado del número de estudiantes que obtendrá un número par en el dado y un sello en la moneda?

A) 32

B) 12

C) 64

D) 16

E) 8

RESOLUCIÓN

Para resolver esta pregunta se debe determinar el valor esperado del número de estudiantes que obtendrá un número par en el dado y un sello en la moneda.

En el enunciado se dice que cada uno de 64 estudiantes lanzará un dado común y una moneda, luego en el lanzamiento de un dado común y una moneda se define la variable aleatoria discreta X como el número de estudiantes, entre los 64, que obtienen un número par en el dado y un sello en la moneda.

Como el lanzamiento lo realizan cada uno de los estudiantes, independientemente uno del otro, se puede modelar X a través de una distribución binomial, para determinar el valor esperado de X.

> **Recuerde que:**
> si $X \sim B(N, p)$, entonces el **valor esperado** de X es Np.

Además, se tiene que:

- la probabilidad de obtener un número par en el lanzamiento de un dado común es $\frac{1}{2}$.
- la probabilidad de obtener un sello en el lanzamiento de una moneda es $\frac{1}{2}$.

Ahora, si se considera a p como la probabilidad de obtener un número par en el lanzamiento del dado y un sello en el lanzamiento de la moneda, se tiene que:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Luego, como $p = \frac{1}{4}$ y N = 64 se tiene que el valor esperado de X es $64 \cdot \frac{1}{4} = 16$, valor que se encuentra en la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

Contenido: Valor esperado de una variable aleatoria discreta

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 76

Se tienen dos llaveros: P con 4 llaves y Q con 2 llaves. En cada llavero solo hay una llave que abre la puerta de una bodega. Cada llavero tiene la misma probabilidad de ser elegido y cada llave de ese llavero es equiprobable de ser elegida. Si se escoge un llavero al azar y de él se escoge al azar una llave, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que la llave abra la bodega es $\frac{3}{8}$.

II) La probabilidad de que el llavero escogido sea Q y que la llave no abra la bodega es $\frac{1}{2}$.

III) La probabilidad de que el llavero escogido sea P y que la llave abra la bodega es la mitad de la probabilidad de que el llavero escogido sea Q y que la llave abra la bodega.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) Solo II y III

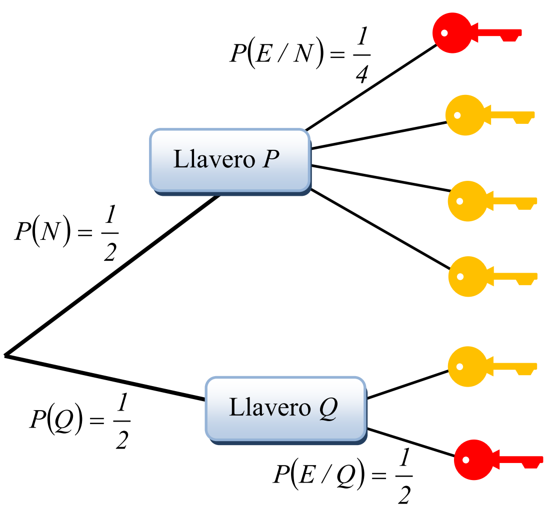
RESOLUCIÓN

Para dar respuesta a la pregunta se debe determinar si las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) son verdaderas.

Del enunciado se tienen dos llaveros, el llavero P tiene 4 llaves y el llavero Q tiene 2 llaves. En cada llavero hay una llave que abre la puerta de la bodega, cada llavero tiene la misma probabilidad de ser elegido y cada llave es equiprobable de ser elegida, lo que se puede representar a través de la definición de eventos, como se muestra a continuación.

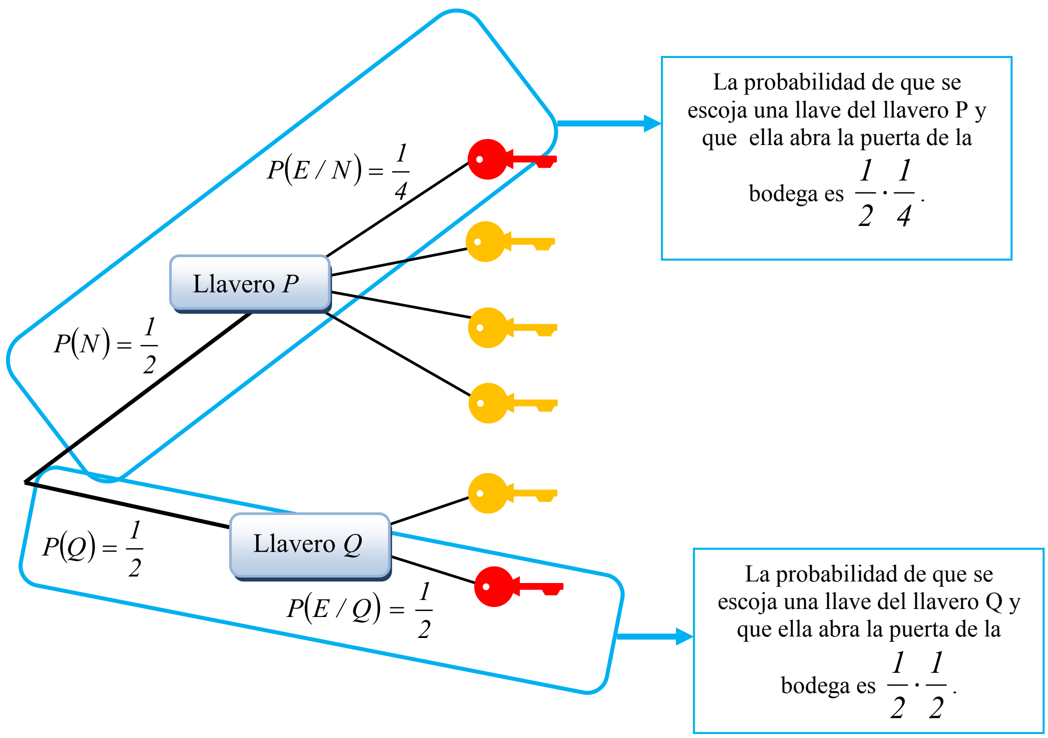
Se definen los eventos:

N: escoger el llavero P
Q: escoger el llavero Q
E: escoger una llave que abre la puerta de la bodega



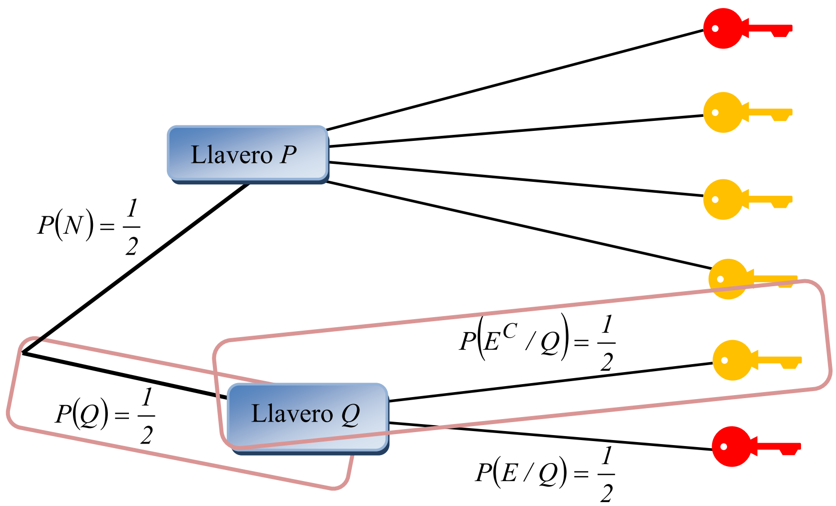
> **Recuerde que:**
> - en cualquier modelo probabilístico, si A y B son **sucesos mutuamente excluyentes**, es decir, $A \cap B = \varnothing$, se tiene que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
> - en cualquier modelo probabilístico, si A y B son **sucesos**, se tiene que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ y si A y B son **sucesos independientes**, se tiene que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Si se escoge un llavero al azar y de él se escoge al azar una llave, entonces puede ocurrir que el llavero escogido sea P y se seleccione la llave correcta o que se escoja el llavero Q y se seleccione la llave correcta, esto se representa a continuación:



Luego, la probabilidad de que la llave abra la puerta de la bodega es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, por lo que la afirmación en I) es verdadera.

Por otra parte, la situación planteada en II) se puede representar como se muestra a continuación:



Por lo que la probabilidad de que el llavero escogido sea Q y que la llave escogida no abra la bodega es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, luego la afirmación en II) es falsa.

Por último, en III), la probabilidad de que el llavero escogido sea P y que la llave abra la puerta de la bodega es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ y la probabilidad de que el llavero escogido sea Q y que la llave abra la puerta de la bodega es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, donde se obtiene que $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$, siendo la afirmación en III) verdadera.

De lo anterior, la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de probabilidad condicional y aplicarlo en diversas situaciones que involucren el cálculo de probabilidades.

Contenido: Probabilidad condicional

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 77

En una población el 52% son hombres de los cuales el 12% es zurdo y el 15% de las mujeres también lo es. Si se eligiera al azar una persona entre las personas zurdas de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea hombre?

A) $\frac{52}{100} \cdot \frac{12}{100}$

B) $\frac{12}{52}$

C) $\frac{12}{15}$

D) $\frac{12}{52} \cdot \frac{33}{48}$

E) $\frac{12 \cdot 52}{12 \cdot 52 + 15 \cdot 48}$

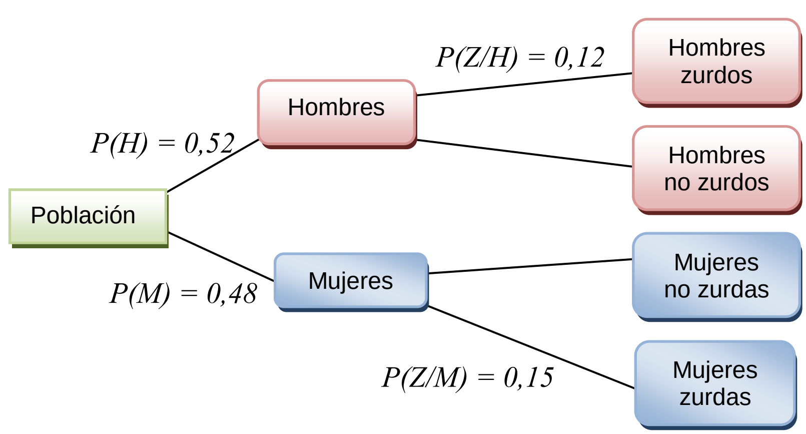
RESOLUCIÓN

Del enunciado se tiene que el 52% de la población es hombre, por lo que el 48% es mujer. Luego se menciona que de los hombres, el 12% es zurdo y de las mujeres, el 15% es zurda.

Para resolver el problema se pueden definir los siguientes eventos:

H: ser hombre　　**M**: ser mujer　　**Z**: ser persona zurda

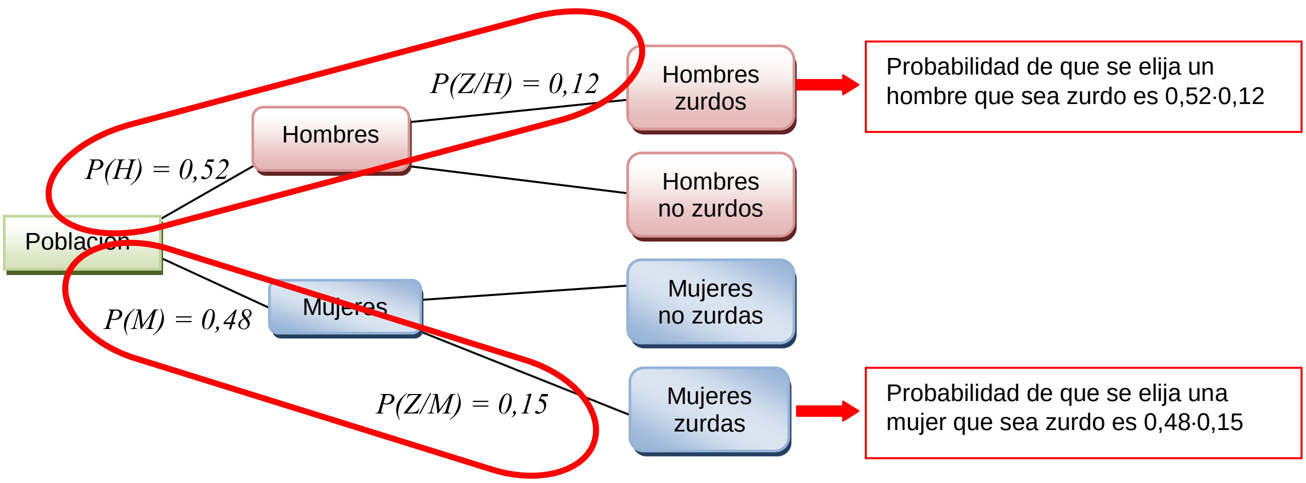
En el siguiente diagrama se representa la información de la pregunta.



Recuerde que:

- en cualquier modelo probabilístico, si A y B son **sucesos mutuamente excluyentes**, es decir, $A \cap B = \varnothing$, se tiene que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- en cualquier modelo probabilístico, si A y B son **sucesos**, se tiene que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ y si A y B son **sucesos independientes**, se tiene que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ahora, si se eligiera a una persona entre los zurdos de la población, esta puede ser un hombre zurdo o una mujer zurda, lo que se representa como se muestra a continuación:



Como se pide la probabilidad de que la persona que se elija entre los zurdos de la población sea hombre, se puede calcular el valor de $P(H/Z) = \dfrac{P(H \cap Z)}{P(Z)}$, lo cual se realiza de la siguiente manera:

$$P(H \cap Z) = P(H) \cdot P(Z/H) = 0{,}52 \cdot 0{,}12 = \frac{52}{100} \cdot \frac{12}{100}$$

$$\begin{aligned} P(Z) &= P(H \cap Z) + P(M \cap Z) \\ &= P(H) \cdot P(Z/H) + P(M) \cdot P(Z/M) \\ &= 0{,}52 \cdot 0{,}12 + 0{,}48 \cdot 0{,}15 \\ &= \frac{52}{100} \cdot \frac{12}{100} + \frac{48}{100} \cdot \frac{15}{100} \end{aligned}$$

$$P(H/Z) = \frac{P(H \cap Z)}{P(Z)} = \frac{\frac{52}{100} \cdot \frac{12}{100}}{\frac{52}{100} \cdot \frac{12}{100} + \frac{48}{100} \cdot \frac{15}{100}} = \frac{52 \cdot 12}{52 \cdot 12 + 48 \cdot 15}$$

Por lo anterior, la opción E) es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de probabilidad condicional y aplicarlo en diversas situaciones que involucren el cálculo de probabilidades.

Contenido: Probabilidad condicional

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: E

PREGUNTA 78

En el experimento de lanzar un dado común 100 veces de manera independiente, se define la variable aleatoria discreta X como la cantidad de veces que se obtuvo el número 4. Si la variable aleatoria X es aproximada por una distribución normal con media μ y desviación estándar σ, ¿cuál es el valor de μ y σ, respectivamente?

A) $\frac{100}{6}$ y $\frac{\sqrt{500}}{6}$

B) 0 y 1

C) $\frac{100}{6}$ y $\frac{500}{36}$

D) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ y $\frac{500}{36}$

E) 50 y 5

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem recuerde que:

si X tiene una distribución binomial tal que $X \sim B(n, p)$, la distribución de X puede ser aproximada por una distribución normal Z tal que $Z \sim N(np, np(1-p))$.

Como el dado es lanzado 100 veces de manera independiente, n = 100 y se ha definido la variable aleatoria discreta X como la cantidad de veces en que se obtuvo el 4, se tiene que la distribución que modela a X es una distribución binomial.

Para determinar el valor de p, se debe considerar que al lanzar un dado común la probabilidad de obtener un 4 es $\frac{1}{6}$.

Luego, si la distribución de X es aproximada por la distribución normal se tiene que $\mu = 100 \cdot \frac{1}{6} = \frac{100}{6}$ y $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \frac{\sqrt{500}}{6}$, valores que se encuentran en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Utilizar modelos probabilísticos para representar y estudiar diversas situaciones y fenómenos en condiciones de incerteza.

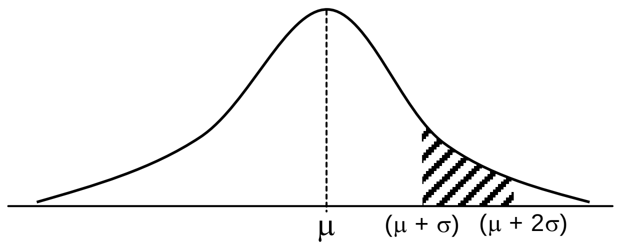
Contenido: Aproximación de una distribución binomial por una distribución normal

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 79

En la figura adjunta se muestra la función densidad de la variable aleatoria X, la cual tiene una distribución normal con media μ y desviación estándar σ. ¿Cuál de los siguientes números es la mejor aproximación de la probabilidad que representa la zona achurada?



A) 0,08

B) 0,14

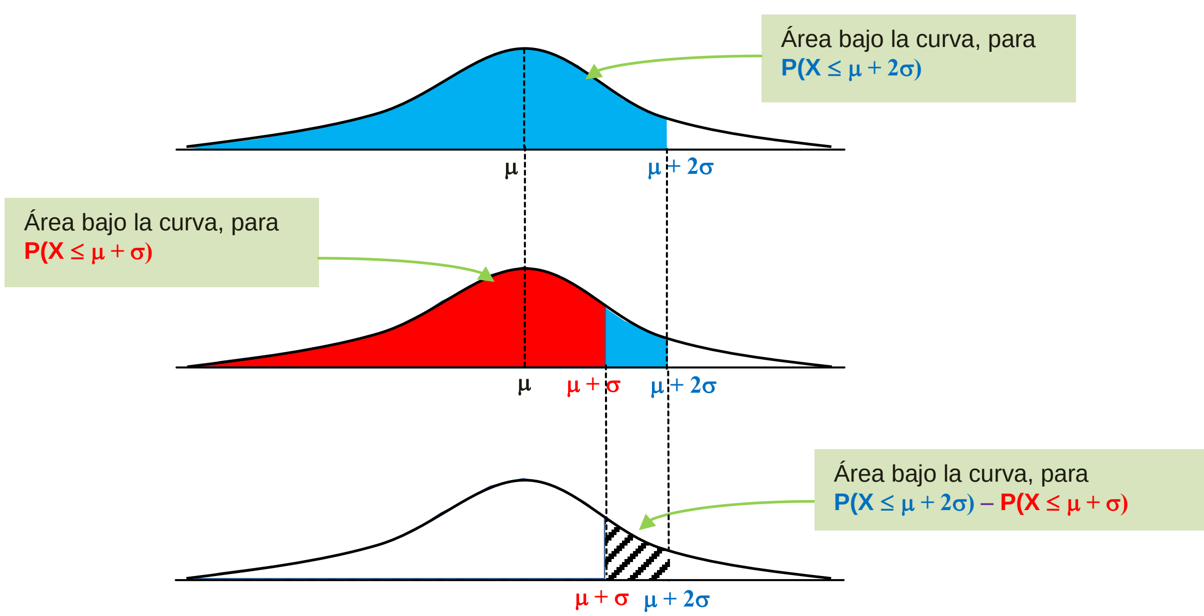
C) 0,27

D) 0,17

E) 0,34

RESOLUCIÓN

Una forma de resolver este ítem es estandarizar la variable aleatoria X, y luego determinar $P(X \leq \mu + 2\sigma) - P(X \leq \mu + \sigma)$, lo que se representa gráficamente:



Recuerde que:

si X es una **variable aleatoria continua** tal que $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$, entonces la variable aleatoria $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ tiene distribución normal $(0,\ 1)$, es decir, $Z \sim N(0,\ 1)$, por lo que se cumple que $P(X \leq x) = P\left(Z \leq \dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

Ahora, $P(X \leq \mu + 2\sigma) = P\left(Z \leq \dfrac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq 2)$, luego hay que considerar el valor que le corresponde a z = 2 en la tabla que está en las instrucciones de la contratapa de este modelo, el cual es 0,977.

Del mismo modo, $P(X \leq \mu + \sigma) = P\left(Z \leq \dfrac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq 1)$, luego al valor z = 1 le corresponde el valor 0,841 en la tabla que aparece en las instrucciones del modelo.

Así, $P(X \leq \mu + 2\sigma) - P(X \leq \mu + \sigma) = 0{,}977 - 0{,}841 = 0{,}136$.

Por lo que, de los números de las opciones la mejor aproximación de la probabilidad que representa la zona achurada es 0,14, valor que se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, para el caso de una variable aleatoria continua.

Contenido: Distribución normal

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 80

En un taller de arte se selecciona al azar un estudiante. Se puede determinar la probabilidad de que este vista pantalones negros, si se sabe que:

(1) El 85% de los integrantes de este taller visten pantalones.

(2) En este taller, el 60% de los que visten pantalones, los llevan de color negro.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

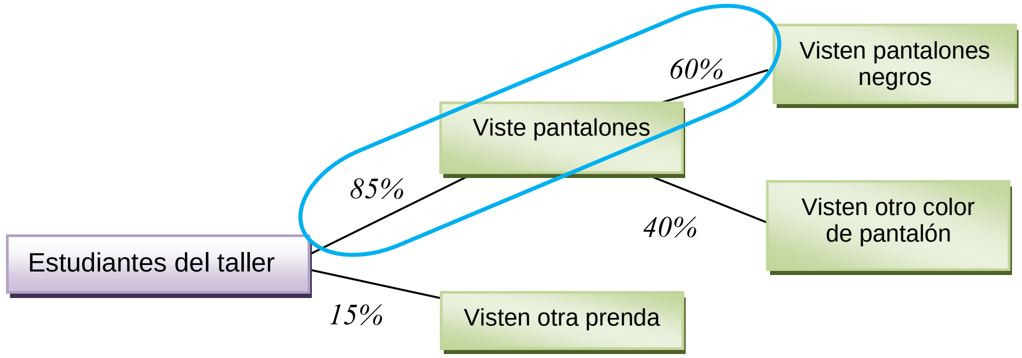
RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe determinar si con las informaciones dadas en (1) y/o en (2) se puede obtener la probabilidad de que al seleccionar al azar un estudiante del taller este vista pantalones negros, es decir, la probabilidad de que un estudiante vista pantalones por la probabilidad de que los pantalones que vista sea de color negro.

Con la información dada en (1) no se puede determinar la probabilidad pedida, debido a que el porcentaje que se indica es solo referido a la cantidad de personas que usan pantalones en el taller.

Con la información dada en (2) tampoco se puede determinar la probabilidad pedida, debido a que el porcentaje dado está referido a las personas que visten pantalones de color negro, pero nada se dice del porcentaje de estudiantes que usan pantalones.

Ahora, si se juntan ambas informaciones se puede formar el siguiente diagrama:



Luego, de esta representación se puede determinar la probabilidad de que al seleccionar a un estudiante del taller este vista pantalones negros.

De lo anterior la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Aplicar propiedades de la suma y producto de probabilidades, en diversos contextos, a partir de la resolución de problemas que involucren el cálculo de probabilidades.

Contenido: Propiedad del producto de probabilidades

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: C

DEMRE

PIONEROS • EXPERTOS • CONFIABLES