PREGUNTA

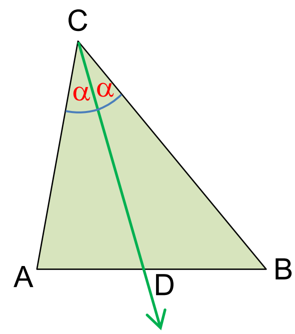
Sea un triángulo ABC de perímetro 60 cm, donde $\overline{AB}$ mide 20 cm. Si la bisectriz $\overline{CD}$ del ángulo en C divide a $\overline{AB}$ de modo que AD : DB = 3 : 7, con D en $\overline{AB}$, ¿cuál es la medida del segmento AC?

A) 12 cm
B) 28 cm
C) 15 cm
D) 18 cm
E) No se puede determinar.

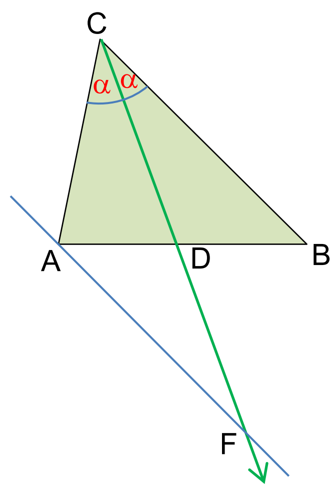
COMENTARIO

Una forma de resolver este problema es dibujar la situación descrita en el enunciado y realizar una construcción que permita obtener la relación entre la medida del segmento AC y la proporción AD : DB = 3 : 7, como se muestra a continuación:

Primero se dibujará el triángulo ABC y se trazará la bisectriz $\overrightarrow{CD}$ del ángulo en C, la cual intersectará a $\overline{AB}$ en D, tal como se muestra en la siguiente figura:



Ahora, como del enunciado se tiene la razón en que D divide a $\overline{AB}$, se recomienda trazar una recta paralela al lado $\overline{CB}$ que pase por A de tal manera de obtener el punto de intersección (F) entre la bisectriz y la recta paralela, obteniéndose los triángulos ADF y ADC, como se muestra a continuación:



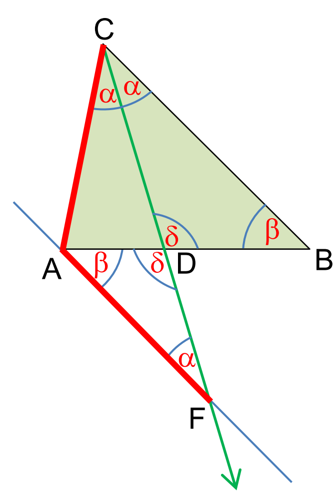
Recuerde que:

Dos **triángulos** son **semejantes** si sus ángulos correspondientes son iguales y los lados homólogos son proporcionales.

Uno de los **criterios de semejanza** que permite determinar si dos triángulos lo son, es el ángulo-ángulo (**AA**) que señala que si dos triángulos tienen dos pares de ángulos de igual medida, entonces los triángulos son semejantes.

A parir de la construcción anterior se obtiene lo siguiente:

- $\sphericalangle$ FAD = $\sphericalangle$ DBC = β, ya que son alternos internos entre paralelas.
- $\sphericalangle$ CDB = $\sphericalangle$ ADF = δ, por ser ángulos opuestos por el vértice.
- $\sphericalangle$ BCD = $\sphericalangle$ DFA = α, pues son alternos internos entre paralelas.
- Δ ADF $\sim$ Δ BDC, por el criterio de semejanza de triángulos AA, de esta manera se cumple la proporción $\frac{AF}{CB} = \frac{AD}{DB}$.
- AC = AF, debido a que el triángulo ACF es isósceles de base $\overline{CF}$, por lo que al reemplazar en la proporción anterior se tiene que $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$.
- Como AD : DB = 3 : 7, se obtiene $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{7}$, lo que se puede escribir como $CB = AC \cdot \frac{7}{3}$.



Por otro lado, como del enunciado se tiene que AC + CB + AB = 60 cm y AB = 20 cm, se llega a que:

$$AC + CB + 20 = 60$$
$$AC + CB = 40$$

Finalmente, se reemplaza CB = AC$\cdot\dfrac{7}{3}$ en AC + CB = 40 cm, de lo cual se obtiene:

Se suman los términos semejantes.

$$AC + AC \cdot \frac{7}{3} = 40$$
$$\frac{3AC + 7AC}{3} = 40$$
$$\frac{10AC}{3} = 40$$
$$\frac{\cancel{10}AC}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{10}} = 40 \cdot \frac{3}{10}$$
$$AC = 4 \cdot 3$$
$$AC = 12$$

Se despeja AC, multiplicando por $\dfrac{3}{10}$ en ambos lados de la igualdad para luego simplificar.

Así, la opción correcta es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

Contenido: Semejanza de triángulos.

Habilidad Cognitiva: Aplicación

Clave: A