30 DE JULIO DE 2009

DOCUMENTO OFICIAL

Resolución Modelo Oficial Prueba Matemática Parte III

EN ESTA PUBLICACIÓN, ENCONTRARÁS UN COMPLETO ANÁLISIS DE LAS PREGUNTAS 37 A LA 55, DEL MODELO OFICIAL DE LA PRUEBA DE MATEMÁTICA, QUE SE PUBLICÓ EN EL MERCURIO EL 7 DE MAYO, Y QUE CORRESPONDE AL EJE TEMÁTICO DE GEOMETRÍA.

Universidad de Chile
VICERRECTORÍA DE ASUNTOS ACADÉMICOS
DEMRE

CONSEJO DE RECTORES
UNIVERSIDADES CHILENAS

N°16 SERIE DEMRE - UNIVERSIDAD DE CHILE

RESOLUCIÓN DEL MODELO OFICIAL DE MATEMÁTICA

PARTE III

PRESENTACIÓN

La presente publicación se abocará al análisis de las preguntas Nº 37 a la Nº 55, correspondientes al eje temático de Geometría, contenidas en la publicación del 07 de mayo del presente año. Cabe señalar que de los cuatro ejes temáticos que conforman la PSU® Matemática, Geometría es el que presenta, año a año, el menor porcentaje medio de respuestas correctas y el mayor porcentaje medio de respuestas omitidas.

Por lo tanto, es importante, tanto para profesores como para estudiantes, revisar todos los contenidos de este eje temático, para mejorar estos porcentajes. Además, para responder las preguntas de Geometría, los estudiantes deben, por una parte, haber desarrollado las habilidades cognitivas, desde la más básica que es de Reconocimiento hasta las de orden superior, donde deben tener la capacidad de realizar Análisis, Síntesis y Evaluación. Por otra parte, recordar y aplicar contenidos previos, que se suponen internalizados durante la Enseñanza Básica, que deberían haber sido reforzados durante la Enseñanza Media. También, deben aplicar en varias preguntas operaciones y propiedades de Álgebra, que se estudian durante la Enseñanza Media.

Las preguntas de esta publicación son de primero a cuarto año medio, en ellas se especificará el contenido al que apuntan y los tópicos previos que son necesarios para su resolución. Además, para cada una se indicará el grado de dificultad con que resultó, el porcentaje de omisión que tuvo y se señalarán los errores más comunes que cometieron los alumnos en la resolución de estos ítemes.

COMENTARIO DE LAS PREGUNTAS REFERIDAS AL EJE TEMÁTICO DE GEOMETRÍA

PREGUNTA 37

En la figura 5, la circunferencia tiene radio **1** y la semicircunferencia tiene radio $\frac{1}{2}$. Si se gira toda la figura en torno al centro O en 180°, en el sentido de la flecha, el punto **A**, que está sobre la semicircunferencia, queda en las coordenadas

A) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

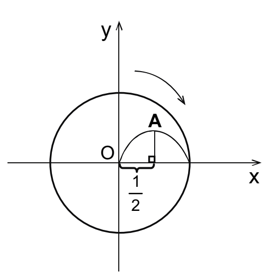
B) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

C) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

D) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

E) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

fig. 5



COMENTARIO

Esta pregunta apunta al contenido de rotación de figuras planas en el sistema de coordenadas. Para responderla el postulante debe identificar los elementos involucrados en una rotación (centro, ángulo de rotación y sentido), dados tanto en el enunciado como en la figura, para poder aplicar la transformación al punto A.

En este caso, la figura se rota en torno al centro O en 180° y en el sentido de la flecha indicada en la figura, luego es ésta la rotación que hay que aplicar al punto A.

Si se considera P como el centro de la semicircunferencia de radio $\frac{1}{2}$ y como A es un punto de ella, se tiene que $\overline{OP} \cong \overline{PA}$, por ser ambos radios. Además, $\overline{OP} \perp \overline{PA}$, por lo tanto las coordenadas del punto A son $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ahora, al aplicar al punto A la rotación indicada anteriormente se obtiene el punto A' de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, ya que $\measuredangle$ AOA' = 180° y OA = OA'. Estas coordenadas se encuentran en la opción C), que es la clave.

Esta opción fue marcada por el 34,6% de las personas que abordaron el ítem, por lo que éste se considera difícil. Además, la omisión fue alta, alcanzando al 39,6%.

El distractor más marcado fue A), con un 7,5% de adhesión. Los alumnos que marcaron esta opción es posible que determinaran bien las coordenadas del punto A, pero lo rotaron en 90° en vez de hacerlo en 180°, o bien, lo rotaron en torno a la semicircunferencia menor.

PREGUNTA 38

Se tiene el triángulo cuyos vértices están ubicados en los puntos: A(1, 2), B(3, 2) y C(3, 5). Si al triángulo ABC se le aplica una traslación que sea paralela al eje x en una unidad a la izquierda, y luego se le aplica otra traslación paralela al eje y en dos unidades hacia arriba, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El nuevo vértice **B** queda ubicado en el punto (2, 4).
II) El nuevo vértice **C** queda ubicado en el punto (2, 7).
III) El nuevo vértice **A** queda ubicado en el punto (0, 4).

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

COMENTARIO

El contenido involucrado en el ítem, es el de traslación de figuras planas en el sistema de coordenadas. Para resolverlo se deben determinar los vectores según los cuales se trasladarán los vértices del triángulo dado en el enunciado.

En efecto, como la primera traslación es paralela al eje x en una unidad a la izquierda se tiene que el primer vector de traslación es (−1, 0). Ahora, como la segunda traslación es paralela al eje y en dos unidades hacia arriba, se tiene que el segundo vector de traslación es (0, 2). Luego al aplicar estas dos traslaciones a los vértices del triángulo se tiene que:

- El nuevo vértice A es (1, 2) + (−1, 0) + (0, 2) = (0, 4).
- El nuevo vértice B es (3, 2) + (−1, 0) + (0, 2) = (2, 4).
- El nuevo vértice C es (3, 5) + (−1, 0) + (0, 2) = (2, 7).

Como las afirmaciones I), II) y III) son verdaderas, se tiene que la clave es E).

El ítem es considerado estadísticamente difícil, ya que lo contestó correctamente el 39,1% de los postulantes que lo abordaron. Además, la omisión fue muy alta, de un 49,2%, lo que indica que los alumnos no supieron como abordar el ítem. Los distractores fueron marcados con porcentajes similares en cada uno de ellos, promediando el 3%, quizás debido a que se equivocaron en alguna de las operaciones entre los números enteros.

PREGUNTA 39

El número de ejes de simetría que tiene un triángulo con dos lados iguales y uno distinto es

A) 4
B) 3
C) 2
D) 1
E) 0

COMENTARIO

El ítem apunta al contenido de clasificación de triángulos, considerando sus ejes de simetría. En este caso, el postulante debe identificar que el triángulo descrito en el enunciado es isósceles y así asociar que estos triángulos sólo tiene un eje de simetría, el cual corresponde a la recta perpendicular en el punto medio de la base.

La respuesta correcta se encuentra en la opción D), que sólo fue contestada por el 25,8% de las personas que abordaron el ítem, por lo que éste es considerado difícil. Por otro lado, la omisión resultó muy alta, del 42,4%, situación que llama la atención, pues este contenido se debe aplicar a una figura conocida.

El distractor B) fue el más marcado, con un 13,3% de adhesión. Es posible que en este caso confundieran el triángulo dado con el equilátero, que es el que tiene tres ejes de simetría.

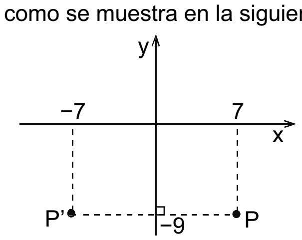
PREGUNTA 40

Dado un punto P de coordenadas (7, –9), ¿cuáles son las coordenadas del punto simétrico de P con respecto al eje y?

A) (–7, –9)
B) (7, 9)
C) (–7, 9)
D) (–9, 7)
E) (–9, –7)

COMENTARIO

Esta pregunta está referida al contenido de simetría de figuras planas en el sistema de coordenadas. El alumno para responderla, debe aplicar al punto P(7, −9) una simetría con respecto al eje y, como se muestra en la siguiente figura:



Es así como, el punto P' es el simétrico de P, con respecto al eje y, pues $\overline{P'P}$ es perpendicular al eje y, además, la distancia de P' al eje y es igual a la distancia de P al eje y, luego las coordenadas de P' son (−7, −9), las que están en la opción A).

El 12,6% de los postulantes marcó el distractor C), que corresponde al simétrico del punto P con respecto al origen del sistema de coordenadas.

La pregunta resultó difícil, pues sólo el 29% de los alumnos la contestó correctamente. Al igual que los ítemes anteriores la omisión fue alta, en este caso 41,5%, por lo tanto, se podría inferir que las transformaciones isométricas en el sistema de coordenadas, es un tema no muy manejado por los estudiantes.

PREGUNTA 41

En la figura 6, ABCD es un cuadrado de lado 10, en el cual se ha inscrito el trapecio isósceles EFGH. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El área de EFGH es 48.
II) Δ AEH $\cong$ Δ CFG
III) HJ = EF

A) Sólo II
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

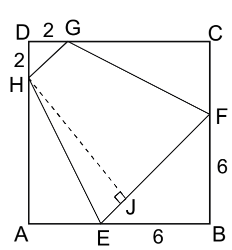


fig. 6

COMENTARIO

El ítem apunta a la resolución de problemas relativos a polígonos y su descomposición en figuras congruentes y a la aplicación de los criterios de congruencia de triángulos. Además, el alumno debe calcular el área de distintos polígonos y aplicar el teorema de Pitágoras para determinar la medida de un lado de un triángulo rectángulo, estos últimos dos contenidos son estudiados en la Enseñanza Básica.

Como la medida del lado del cuadrado es 10, se tiene que GC = HA = 8 y CF = AE = 4. Además, se sabe que $\sphericalangle$ GCF = $\sphericalangle$ HAE = 90°, lo que permite determinar que los triángulos AEH y CFG son congruentes, por el criterio LAL (lado-ángulo-lado), luego la afirmación II) es verdadera.

Ahora, para determinar el área del trapecio EFGH, se deben determinar las medidas de sus bases $\overline{EF}$ y $\overline{HG}$ y la altura $\overline{HJ}$. Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos EBF y HGD, respectivamente, se tiene HG = $\sqrt{4+4}$ = $\sqrt{8}$ = $2\sqrt{2}$ y EF = $\sqrt{36+36}$ = $\sqrt{72}$ = $6\sqrt{2}$.

Para determinar la medida de $\overline{HJ}$, se deben encontrar las medidas de los lados del Δ EJH. Como el trapecio EFGH es isósceles, se tiene que 2 · EJ + HG = EF, de donde se obtiene que 2 · EJ = EF − HG,

luego $EJ = \dfrac{EF - HG}{2} = \dfrac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Así, la medida del lado $\overline{EH}$, se determina mediante la aplicación del teorema de Pitágoras en el Δ AEH, o sea, HE = $\sqrt{8^2+4^2}$ = $\sqrt{64+16}$ = $\sqrt{80}$. Luego, se aplica este teorema en el triángulo EJH para determinar la medida de la altura $\overline{HJ}$ del trapecio, obteniéndose que HJ = $\sqrt{\left(\sqrt{80}\right)^2 - (2\sqrt{2})^2}$ = $\sqrt{80-8}$ = $\sqrt{72}$ = $6\sqrt{2}$.

Con estos datos se puede calcular el área del trapecio, que es:
$\dfrac{EF + HG}{2} \cdot HJ = \dfrac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot 6\sqrt{2} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 48$. Con este valor se concluye que la afirmación I) es verdadera.

El área del trapecio también se puede determinar como la diferencia entre el área del cuadrado y la suma de las áreas de los triángulos rectángulos que se forman en cada uno de los vértices del cuadrado.

Del análisis anterior, se tiene que HJ = EF = $6\sqrt{2}$, por lo que III) también es verdadera, luego la clave es E).

La pregunta resultó muy difícil, sólo la contestó correctamente el 6,4% de las personas que la abordaron. Además, la omitió el 55,9% de los postulantes, estos porcentajes demuestran que los alumnos no están habituados a trabajar con preguntas en donde los datos no están dados en forma directa.

El distractor más marcado fue B), con un 9,1%. Es posible que los jóvenes en este caso, determinaran el área del trapecio restando al área del cuadrado las áreas de los triángulos, pero no supieron como calcular la medida de la altura de dicho trapecio.

PREGUNTA 42

Si el Δ ABC de la figura 7 es equilátero de lado 2 y $\overline{AD} \cong \overline{DB}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Los triángulos ADC y BDC son congruentes.
II) $\sphericalangle$ ACD = 30°
III) CD = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

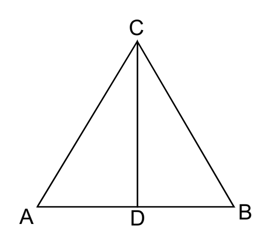


fig. 7

COMENTARIO

Esta pregunta apunta a medir los criterios de congruencia de triángulos. Además, los alumnos deben aplicar el teorema de Pitágoras y deben saber que en un triángulo equilátero los elementos secundarios trazados desde un vértice coinciden entre ellos, temas tratados en la Enseñanza Básica.

En el triángulo equilátero ABC de la figura, $\overline{AD} \cong \overline{DB}$, por lo tanto, $\overline{CD}$ es transversal de gravedad, bisectriz y altura de él.

La afirmación I) es verdadera, ya que los triángulos ADC y BDC son congruentes por el criterio LLL (lado-lado-lado), debido a que AC = CB = 2, DA = DB = 1 y $\overline{CD}$ es un lado común a ambos triángulos.

Ahora, como $\sphericalangle$ ACB = 60°, por ser el Δ ABC equilátero y $\overline{CD}$ es bisectriz del $\sphericalangle$ ACB, se tiene que $\sphericalangle$ ACD = 30°, luego II) es también verdadera.

Como $\overline{CD}$ es una altura del triángulo, se aplica el teorema de Pitágoras en el Δ ADC para determinar su medida. Así, CD = $\sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, luego III) es falsa.

De esta manera, la opción correcta es C), la cual fue marcada por el 43,1% de los alumnos que abordaron el ítem, por lo tanto, éste es considerado de dificultad mediana.

La omisión fue del 27,2% y el distractor más marcado fue E), con un 13,3%. En este caso consideraron que III) es verdadera, el error que cometen seguramente los alumnos es que debido a que, la altura de un triángulo equilátero es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **a**, donde **a** es la medida del lado del triángulo, se olvidan de reemplazar **a** por 2.

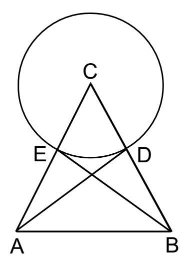
PREGUNTA 43

El triángulo ABC es isósceles de base $\overline{AB}$. La circunferencia de centro C y radio r intersecta a los lados del triángulo en D y E, como lo muestra la figura 8. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Δ ABD $\cong$ Δ ADC
II) Δ ABE $\cong$ Δ BAD
III) Δ ADC $\cong$ Δ BEC

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

fig. 8



COMENTARIO

El alumno para responder correctamente este ítem debe saber aplicar los criterios de congruencia de triángulos.

La afirmación I) es falsa, pues los triángulos ABD y ADC sólo tienen en común el lado $\overline{AD}$, AC ≠ AB y no se puede afirmar que CD = DB.

En cambio II) es verdadera, ya que los triángulos ABE y BAD son congruentes según el criterio LAL (lado-ángulo-lado). En efecto, $\overline{AB}$ es lado común a ambos triángulos, $\sphericalangle$ EAB = $\sphericalangle$ DBA, por ser ambos los ángulos básales del Δ ABC y AE = BD, por que AC = BC y EC = CD = r.

Por el mismo criterio de congruencia anterior, se tiene que los triángulos ADC y BEC son congruentes, ya que EC = CD, $\sphericalangle$ ACB es común a ambos triángulos y AC = BC. Luego, III) es verdadera.

De acuerdo al análisis anterior la clave es la opción D). El ítem resultó de mediana dificultad, pues el 43,3% de los postulantes lo contestó correctamente. A pesar de esto, la omisión fue alta, alcanzando al 36,1%.

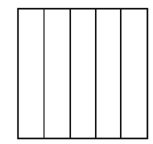
El distractor con mayor preferencia fue E) (11,3%), en este caso consideraron que I) era verdadera, quizás los alumnos no fueron capaces de identificar que los lados de los triángulos involucrados no eran congruentes y sólo se guiaron por la figura.

PREGUNTA 44

En la figura 9, el cuadrado se ha dividido en 5 rectángulos congruentes entre sí, y cada rectángulo tiene un perímetro de 30 cm. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?

A) 50 cm
B) 48 cm
C) 60 cm
D) 150 cm
E) Ninguno de los valores anteriores.

fig. 9



COMENTARIO

Esta pregunta apunta a la resolución de problemas relativos a polígonos, descomposición en figuras congruentes o puzzles con figuras geométricas. Además, el alumno debe saber calcular el perímetro de un rectángulo y de un cuadrado, contenido perteneciente a la Enseñanza Básica.

Para resolver el ítem se designará por x al lado de menor medida de cada uno de los rectángulos congruentes, por lo que el lado de mayor medida queda expresado por 5x, que corresponde al lado del cuadrado.

Luego, para determinar x se escribe la expresión que representa el perímetro de cada rectángulo igual a 30 cm, en efecto 2(5x + x) = 30, que es equivalente a 12x = 30, de donde x = $\frac{30}{12} = \frac{5}{2}$ cm.

Con este valor se puede determinar la medida del lado del cuadrado, que es $5x = 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$ cm. Por último, se determina el perímetro del cuadrado que corresponde a cuatro veces la medida de su lado, o sea, $4 \cdot \frac{25}{2} = 2 \cdot 25 = 50$ cm, respuesta que se encuentra en la opción A).

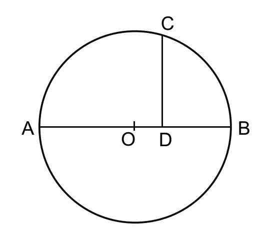
El ítem resultó muy difícil, contestándolo correctamente el 11,7% de los postulantes que lo abordaron. La omisión fue de un 28,1% y el distractor D) fue el más elegido por los alumnos, con un 39,8%. Para llegar a este valor, posiblemente, los alumnos aplicaron bien el procedimiento de resolución del ítem, pero en vez de aplicar las fórmulas de perímetro usaron las de áreas. En efecto, para determinar x, hacen $5x \cdot x = 30$, de donde x = $\sqrt{6}$ cm, luego el lado del cuadrado es $5\sqrt{6}$ cm y por lo tanto el perímetro pedido lo calculan como $5\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6} = 150$ cm. O bien, calcularon el perímetro de cada rectángulo, que es 30 cm y lo multiplicaron por 5.

PREGUNTA 45

En la circunferencia de centro O de la figura 10, $\overline{AB}$ es un diámetro, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, DB = 3 cm y CD = 4 cm. El radio de la circunferencia es

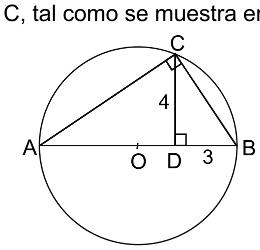
A) 4 cm
B) 5 cm
C) $\frac{25}{6}$ cm
D) $\frac{19}{6}$ cm
E) indeterminable con los datos dados.

fig. 10



COMENTARIO

El contenido involucrado en esta pregunta corresponde a la aplicación del teorema de Euclides relativo a la altura de un triángulo rectángulo. El estudiante debe colocar los datos del enunciado en la figura y trazar en ella líneas auxiliares, de modo que se forme el Δ ABC, rectángulo en C, tal como se muestra en la siguiente figura:



Para encontrar la medida del radio, se debe determinar la medida del diámetro $\overline{AB}$ y para ello se debe encontrar la medida de $\overline{AD}$. Es así como se aplica el teorema de Euclides relativo a la altura $\overline{CD}$, quedando la igualdad $CD^2 = AD \cdot DB$, reemplazando en ésta por los valores correspondientes, se tiene que $4^2 = AD \cdot 3$, de donde se obtiene que $AD = \frac{16}{3}$ cm.

La medida del diámetro $\overline{AB}$ de la circunferencia, se calcula como $AB = AD + DB = \frac{16}{3} + 3 = \frac{25}{3}$ cm, por lo tanto, el radio es $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{3} = \frac{25}{6}$ cm, valor que se encuentra en la opción C).

Esta pregunta resultó muy difícil, pues sólo el 9,8% de los alumnos que la abordaron la contestó correctamente. Además, se destaca la altísima omisión que tuvo, del 64,1%.

El distractor más marcado fue E), con un 14,4%. Es posible que los postulantes no se dieran cuenta de que en la figura había que trazar líneas auxiliares que permitieran formar un triángulo rectángulo y así, poder aplicar el teorema de Euclides para encontrar el radio.

PREGUNTA 46

En la figura 11, C es punto medio del segmento AD y el segmento BC duplica al segmento AB. El segmento AB es al segmento BD como

A) 1 : 2
B) 1 : 3
C) 1 : 4
D) 1 : 5
E) 1 : 6

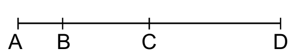


fig. 11

COMENTARIO

El ítem se refiere al contenido de división interior de un trazo, en donde el alumno debe plantear una proporción entre trazos.

Si se designa por x la medida del segmento AB y se sabe que el segmento BC duplica al segmento AB, es decir, BC = 2x, entonces AC = 3x. Ahora, como C es el punto medio de $\overline{AD}$, se obtiene que CD = AC = 3x.

Como BD = BC + CD = 2x + 3x = 5x, se llega a que $\frac{AB}{BD} = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$, razón que se encuentra en la opción D).

Esta pregunta resultó estadísticamente difícil, ya que la contestó correctamente el 37,7% de los postulantes. En cuanto a su omisión, ésta fue del 22,1%.

El 11,9% de los alumnos optó por el distractor E), que fue el más elegido. La razón que aparece en esta opción corresponde a AB : AD.

PREGUNTA 47

Si en la figura 12, $L_1 // L_2$, entonces el valor de **x** es

A) 2
B) 7
C) 12,5
D) 18
E) ninguno de los anteriores.

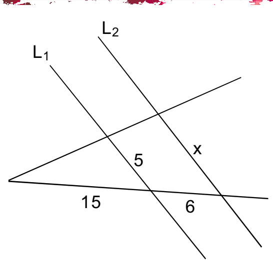


fig. 12

COMENTARIO

El contenido que está involucrado en esta pregunta es la aplicación del teorema de Thales a trazos proporcionales.

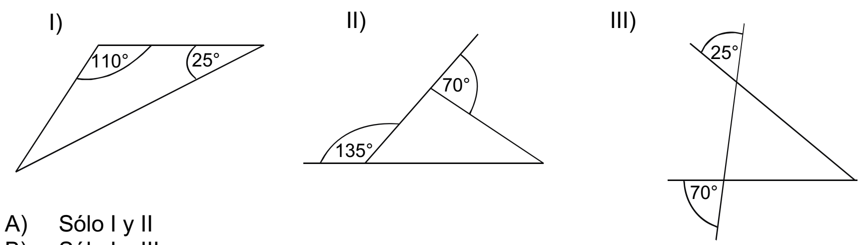
Como $L_1 // L_2$, se cumple la proporción $\frac{15}{5} = \frac{21}{x}$, de donde el valor de x es 7.

Esta respuesta se encuentra en la opción B), que fue marcada por el 32,8% de los postulantes que abordaron el ítem, por lo que éste es considerado difícil. Además, la omisión fue del 47,3%, lo que llama la atención, pues el contenido involucrado en el ítem está preguntado en forma directa y debiese ser bastante ejercitado en la Enseñanza Media.

El error que cometieron los estudiantes al marcar mayoritariamente el distractor A) (6,1%), es frecuente en este tipo de ítem, ya que consideran como válida la proporción $\frac{15}{5} = \frac{6}{x}$, de donde se obtiene que el valor de x es 2.

PREGUNTA 48

¿Cuáles de los siguientes triángulos son semejantes entre sí?



A) Sólo I y II
B) Sólo I y III
C) Sólo II y III
D) I, II y III
E) Ninguno de ellos son semejantes entre sí.

COMENTARIO

Esta pregunta requiere que el alumno sepa identificar los criterios de semejanza de triángulos, en este caso el criterio AA, que indica que dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos, correspondientes, congruentes. Además, de la Enseñanza Básica debe conocer las propiedades de los ángulos de un triángulo.

Para decidir cuáles de los triángulos dados en I), en II) y en III) son semejantes entre sí, hay que determinar la medida de los ángulos interiores de cada uno de ellos. En I), como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, se tiene que la medida del tercer ángulo es 45°.

En II), se debe considerar que un ángulo interior de un triángulo con su correspondiente ángulo exterior suman 180°, luego dos de los ángulos interiores del triángulo de la figura miden 45° y 110° y por lo tanto, el tercero mide 25°.

Por último, para determinar la medida de los ángulos interiores del triángulo que aparece en III), se tiene que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes, por lo tanto, dos de los ángulos interiores del triángulo miden 25° y 70° y el tercero corresponde a lo que falta para completar los 180°, que es 85°.

Como sólo los triángulos que están en I) y en II) tienen un par de ángulos congruentes, sólo estos son semejantes, afirmación que aparece en la opción A).

El ítem resultó de mediana dificultad, pues lo contestó correctamente el 40,2% de los alumnos y la omisión fue del 25,5%. Estos datos llaman la atención, pues lo que se requiere para resolverlo son conceptos básicos de la Geometría.

El distractor E) fue el más seleccionado, con un 16,9% de adhesión, quizás los alumnos determinaron erróneamente los ángulos interiores de los triángulos que aparecen en I), en II) y en III), por lo que concluyeron que no eran semejantes.

PREGUNTA 49

En la figura 13 se representa un poste y una niña, ambos ubicados en forma vertical. Si la niña tiene una altura de 1 metro, y las sombras del poste y de la niña miden 7 metros y 50 centímetros, respectivamente, ¿cuál es la altura del poste?

A) 3,5 metros
B) 7,1 metros
C) 14 metros
D) 35 metros
E) No se puede determinar.

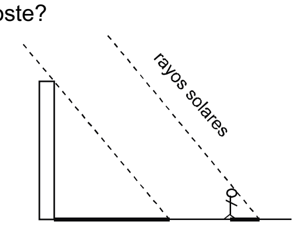


fig. 13

COMENTARIO

Para resolver este ítem el postulante debe reconocer que en la representación del enunciado en la figura se forman triángulos semejantes en donde las razones entre los lados homólogos son iguales. Además, debe saber transformar una medida dada en centímetros a metros, de tal manera que la proporción que se forme entre los lados de los triángulos esté con las mismas unidades.

Es así como 1 m = 100 cm, de donde se tiene que 50 cm = $\frac{50}{100}$ m = 0,5 m.

Los triángulos que se forman con el poste y con la niña son semejantes, ya que tienen dos pares de ángulos congruentes, unos de 90° y los otros son ángulos correspondientes entre paralelas, que son las que representan a los rayos solares.

Los lados homólogos a considerar entre los triángulos son las alturas, tanto del poste como la de la niña y las sombras de ambos, luego $\frac{x}{1} = \frac{7}{0,5}$, donde x representa la altura del poste. Resolviendo la proporción planteada, el valor de x es 14 m, medida que se encuentra en C).

Esta opción fue elegida por el 32,8% de los alumnos, por lo tanto el ítem es considerado difícil y la omisión fue del 38,8%.

El distractor A) fue el más marcado (11,4%). Es posible que los alumnos marcaran este distractor debido a un mal planteamiento de la proporción entre los lados homólogos de los triángulos, o bien, a que realizaron mal la división entre 7 y 0,5.

PREGUNTA 50

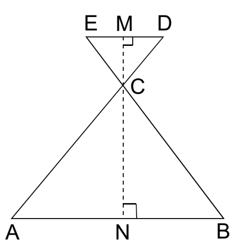
En la figura 14, el triángulo ABC es semejante con el triángulo DEC. Si CM = 5, AB = 21 y CN = 15, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) CN : AB = CM : ED

II) Área Δ EDC = $\frac{35}{2}$

III) $\frac{\text{Área } \Delta \text{ EDC}}{\text{Área } \Delta \text{ ABC}} = \frac{1}{9}$

fig. 14



A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

COMENTARIO

Esta pregunta se refiere a las propiedades que tienen las figuras planas semejantes, en este caso triángulos semejantes. Además, de la Enseñanza Básica los postulantes deben saber calcular el área de un triángulo.

Para determinar la veracidad de I), se debe saber que la razón entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes es igual a la razón entre sus alturas respectivas, en efecto $\frac{AB}{ED} = \frac{CN}{CM}$, reordenando los términos se llega a que $\frac{CM}{ED} = \frac{CN}{AB}$ por lo tanto I) es verdadera.

Ahora, para determinar el área del Δ EDC, se debe determinar la medida del segmento ED, es así como, reemplazando en la proporción obtenida en I), las medidas dadas en el enunciado, se tiene que $\frac{5}{ED} = \frac{15}{21}$, de donde ED = $\frac{5 \cdot 21}{15}$ = 7.

Luego, el área del Δ EDC es $\frac{ED \cdot CM}{2} = \frac{7 \cdot 5}{2} = \frac{35}{2}$, lo que indica que II) es verdadera.

En III), para determinar la razón pedida, falta por calcular el área del Δ ABC, que es $\frac{AB \cdot CN}{2} = \frac{21 \cdot 15}{2} = \frac{315}{2}$, luego $\frac{\text{Área } \Delta \text{ EDC}}{\text{Área } \Delta \text{ ABC}} = \frac{\frac{35}{2}}{\frac{315}{2}} = \frac{35}{315} = \frac{1}{9}$, por lo que III) también es verdadera.

Otra forma de encontrar la razón anterior, es determinando la razón entre dos lados homólogos de los triángulos, o sea, $\frac{ED}{AB} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$, luego como la razón entre las áreas de triángulos semejantes es el cuadrado de la razón en la que están sus lados homólogos, se tiene que la razón pedida es $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Como I), II) y III) son verdaderas la clave es E), que fue marcada por el 18,8% de los postulantes que abordaron el ítem, por lo que éste resultó difícil y la omisión fue muy alta, alcanzando al 56,8%, lo que demuestra que los alumnos no están acostumbrados a trabajar con este tipo de pregunta.

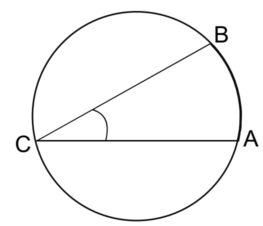
El distractor más elegido fue A), con un 8,2%. Quizás los postulantes determinaron mal el área del Δ EDC, al no calcular bien la medida del segmento ED.

PREGUNTA 51

En la figura 15, los puntos A, B y C están sobre la circunferencia de radio r y $\measuredangle$ ACB = 30°. La longitud del arco AB es

A) $\frac{1}{3}\pi r$
B) $\frac{1}{6}\pi r$
C) $\frac{2}{3}\pi r$
D) $\frac{1}{12}\pi r$
E) ninguna de las anteriores.

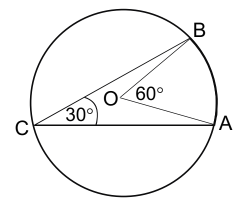
fig. 15



COMENTARIO

Este ítem apunta al teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito. Además, los alumnos deben saber que la medida del ángulo del centro de una circunferencia es directamente proporcional a la longitud del arco que subtiende.

En la figura, colocando los datos del enunciado y trazando líneas auxiliares, se tiene que el $\measuredangle$ AOB es el ángulo del centro que subtiende el mismo arco que el ángulo inscrito ACB y por lo tanto mide el doble, o sea 60°, tal como se muestra en la siguiente figura:



Ahora, como el ángulo del centro es directamente proporcional a la longitud del arco que subtiende y suponiendo que la longitud del arco AB es x, se tiene la proporción $\frac{60^\circ}{x} = \frac{360^\circ}{2\pi r}$, donde $2\pi r$ es la longitud de la circunferencia. De aquí se obtiene que x = $\frac{60 \cdot 2\pi r}{360}$ = $\frac{1}{3}\pi r$, longitud que se encuentra en la opción A).

También, se puede resolver el ítem aplicando directamente la fórmula para determinar la medida del arco de una circunferencia, que es x = $\frac{\pi r \alpha}{180}$, donde α es el ángulo del centro que subtiende dicho arco y r el radio de la circunferencia.

La pregunta resultó muy difícil, sólo la marcó correctamente el 11,6% de los postulantes. La omisión fue muy alta, del 62,2%, lo que llama la atención, pues no es un ítem que requiera de mucho trabajo, quizás sea por el hecho de que hay que trazar líneas auxiliares, o que no reconozcan el contenido que deben aplicar.

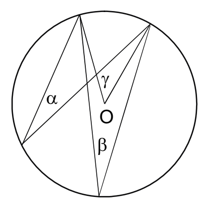
El distractor B) fue el más seleccionado, con un 11%. Posiblemente, los alumnos que lo marcaron, aplicaron bien el método de resolución, pero trabajaron con la medida del ángulo inscrito, en vez de la del ángulo del centro.

PREGUNTA 52

En la circunferencia de centro O de la figura 16, si $\alpha + \beta = 32°$, entonces el valor del ángulo γ es

A) 16°
B) 32°
C) 48°
D) 64°
E) indeterminable.

fig. 16



COMENTARIO

El estudiante para resolver el ítem debe recordar que dos ángulos inscritos a una circunferencia que subtienden el mismo arco son congruentes y que el ángulo del centro que subtiende el mismo arco que un ángulo inscrito mide el doble de éste.

De lo anterior, se tiene que $\alpha = \beta$, que se reemplaza en $\alpha + \beta = 32°$, relación dada en el enunciado, obteniéndose que $2\alpha = 32°$ y por lo tanto, $\alpha = 16°$. Además, $\gamma = 2\alpha$ y reemplazando en esta igualdad el valor de $\alpha = 16°$, se llega a que $\gamma = 2 \cdot 16° = 32°$, valor que se encuentra en la opción B).

Esta pregunta resultó difícil, ya que fue contestada correctamente sólo por 28,6% de los postulantes que la abordaron, pues en este caso sólo se están preguntando las relaciones básicas entre los ángulos de una circunferencia. Además, la omisión fue alta para este tipo de ítem, del 42,9%.

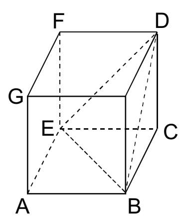
El 14,8% de los estudiantes marcó el distractor A). Es posible que consideraran que el ángulo del centro era igual al ángulo inscrito.

PREGUNTA 53

En la figura 17 se muestra el cubo de arista **a**. El Δ EBD es

A) equilátero.
B) isósceles no equilátero.
C) isósceles rectángulo.
D) rectángulo en D.
E) rectángulo en B.

fig. 17



COMENTARIO

Este ítem apunta al contenido de rectas en el espacio, donde el alumno debe analizar cada uno de los lados del triángulo EBD.

El Δ EBD está formado por los lados $\overline{ED}$, $\overline{BD}$ y $\overline{EB}$, que son diagonales de tres de las caras del cubo y como éstas son congruentes entre sí, se tiene que $\overline{ED} \cong \overline{BD} \cong \overline{EB}$, lo que indica que el Δ EBD es equilátero. Por lo tanto, la clave se encuentra en A).

Aproximadamente el 40% de los estudiantes marcó esta opción, por lo que el ítem es considerado de mediana dificultad. La omisión fue del 28,8%, alta para un ítem de este tipo, quizás se deba a que a los estudiantes les resulta difícil la ubicación espacial.

El distractor más seleccionado fue B), con un 15,2%. Es posible que los alumnos se dejaran llevar por el dibujo y sólo pensaran que los lados $\overline{ED}$ y $\overline{BD}$ eran congruentes, en cambio el lado $\overline{EB}$ era de menor medida, esto debido a un efecto visual.

PREGUNTA 54

Con respecto al triángulo rectángulo ABC de la figura 18, ¿cuál de las siguientes opciones es verdadera?

A) $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{c}$

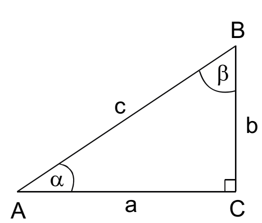
B) $\cos \alpha = \dfrac{c}{a}$

C) $\cos \beta = \dfrac{a}{c}$

D) $\text{sen}\ \beta = \dfrac{b}{c}$

E) $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{a}{b}$

fig. 18



COMENTARIO

Para contestar el ítem los estudiantes deben conocer las definiciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y relacionarlas con los datos dados en la figura.

Si se analiza la opción A), se tiene que la definición de sen α es igual a la razón $\dfrac{\text{Cateto Opuesto de } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$, que relacionada a los datos de la figura permite deducir que $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{c}$, por lo tanto, esta opción es la clave.

El ítem resultó estadísticamente de mediana dificultad, pues aproximadamente el 40% de los postulantes lo contestó correctamente. A pesar de esto el 46,8% de las personas que lo abordaron lo omitió, lo que demostraría que este tema es aún desconocido.

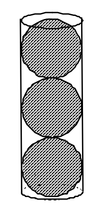
Los postulantes que erraron su respuesta se distribuyeron en forma equitativa entre todos los distractores, lo que demuestra aun más, que las definiciones de las razones trigonométricas no han sido aprendidas por un gran porcentaje de los estudiantes.

PREGUNTA 55

En una caja cilíndrica **caben exactamente tres pelotitas** todas de igual radio **r**, una encima de la otra, como se muestra en la figura 19. El volumen no cubierto por las pelotitas es

A) πr^3
B) $2\pi r^3$
C) $3\pi r^3$
D) $4\pi r^3$
E) $\dfrac{14}{3}\pi r^3$

fig. 19



COMENTARIO

En esta pregunta el alumno debe saber resolver problemas sobre volúmenes de cuerpos geométricos, en particular debe saber calcular el volumen de un cilindro y de una esfera.

Para calcular el volumen no cubierto por las pelotitas se debe restar al volumen del cilindro el volumen de las tres esferas.

El volumen del cilindro se calcula como el producto del área de la base (círculo) por su altura. En este caso el radio de la base del cilindro es el mismo que el radio de las esferas (r) y su altura es tres veces el diámetro de las esferas, o sea, $3 \cdot 2r = 6r$, luego el volumen del cilindro de la figura es $\pi r^2 \cdot 6r = 6\pi r^3$.

Por otro lado, el volumen de una esfera se calcula como $\dfrac{4}{3}\pi r^3$, luego el volumen ocupado por las tres esferas es $3 \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^3$.

Por último, el volumen pedido es $6\pi r^3 - 4\pi r^3 = 2\pi r^3$, el cual se encuentra en la opción B). La pregunta resultó muy difícil, sólo el 9,7% de los estudiantes la contestó correctamente. Es importante destacar, que el 67,2% de los alumnos no supo como abordar el ítem y lo omitió.

El distractor más marcado fue C) con un 10,3% de adhesión. Los alumnos que marcaron este distractor es posible que tengan errada la fórmula para calcular el volumen de una esfera y piensen que es πr^3, por lo tanto el volumen no cubierto por las pelotitas es $6\pi r^3 - 3\pi r^3 = 3\pi r^3$.


mía sólo mía
Kuky
CLÁSICA
AHORA MÁS RICAS