EL MERCURIO
JUEVES 14 DE JUNIO DE 2007

PSU® 2007

DOCUMENTO OFICIAL

SERIE: DEMRE - UNIVERSIDAD DE CHILE
Nº 9

RESOLUCIÓN FACSÍMIL

PRUEBA DE MATEMÁTICA

PARTE I

EN ESTA EDICIÓN ENCONTRARÁS EL ANÁLISIS DE LAS PREGUNTAS REFERIDAS A LOS EJES TEMÁTICOS DE NÚMEROS Y PROPORCIONALIDAD Y ÁLGEBRA DEL FACSÍMIL QUE SE PUBLICÓ EL 17 DE MAYO.

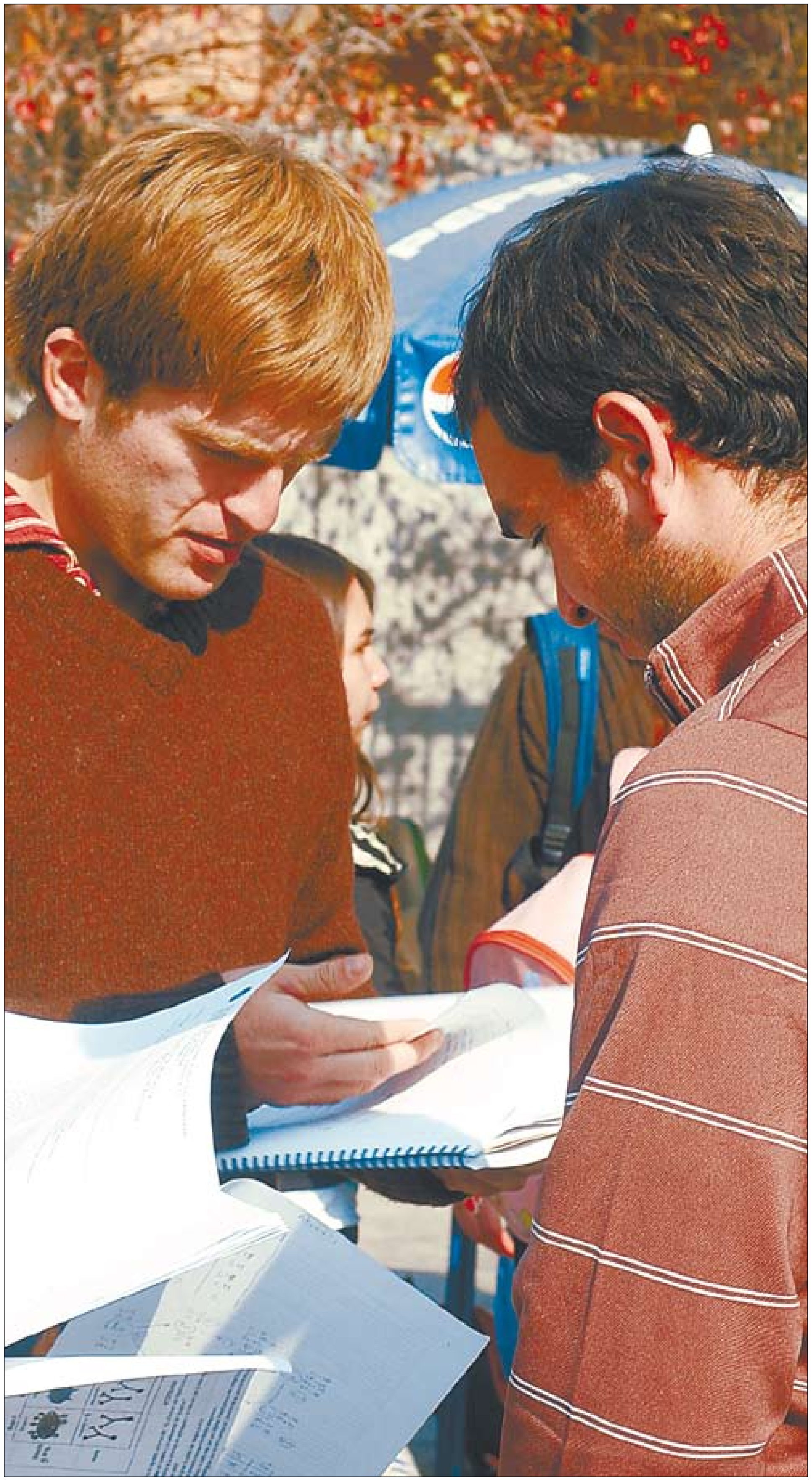
LOS COMENTARIOS INCLUYEN LAS CAPACIDADES QUE SE PONEN EN MARCHA PARA LLEGAR A LA SOLUCIÓN Y LOS ERRORES MÁS COMUNES QUE LOS ALUMNOS COMETEN.

Universidad de Chile
VICERRECTORÍA DE ASUNTOS ACADÉMICOS
DEMRE

CONSEJO DE RECTORES
UNIVERSIDADES CHILENAS

RESOLUCIÓN FACSÍMIL DE MATEMÁTICA

PARTE I



INTRODUCCIÓN

Esta publicación junto a las siguientes tres publicaciones de matemática comentarán las preguntas que aparecen en el facsímil publicado el 17 de mayo de este año, por este mismo diario. El objetivo de estas publicaciones, es entregar información a profesores y alumnos sobre los tópicos y habilidades que se evalúan en cada uno de los ítemes de este facsímil.

Para ello se presentará un análisis cuantitativo y cualitativo de cada una de las preguntas del facsímil, el cual está elaborado con preguntas probadas y cumpliendo con todas las exigencias de una prueba oficial, en términos de contenidos, habilidades, grados de dificultad y tipos de preguntas, en consecuencia, su análisis se estima que sirva de retroalimentación al trabajo de profesores y alumnos.

Cada ítem se presentará acompañado del porcentaje de respuestas correctas, el nivel de omisión y la forma o formas de responderlo, explicitando las capacidades que se ponen en marcha para llegar a la solución y los errores más comunes que los alumnos cometen. También se indicará el curso en el cual se ubica el contenido en el marco curricular y su relación con los otros tópicos de la disciplina.

El porcentaje de respuestas correctas es un indicador de la dificultad de la pregunta en el grupo evaluado y la omisión se considera como un índice de bajo dominio o desconocimiento de los contenidos involucrados en el ítem.

Esta publicación se abocará al análisis de las primeras 18 preguntas del facsímil de prueba mencionado anteriormente y que corresponden a contenidos del primer año de la Enseñanza Media del eje temático de Números y Proporcionalidad y una parte del área temática de Álgebra.

COMENTARIO DE LAS PREGUNTAS REFERIDAS AL EJE TEMÁTICO DE NÚMEROS Y PROPORCIONALIDAD, QUE CORRESPONDEN AL PRIMER AÑO DE LA ENSEÑANZA MEDIA

1. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{1-\dfrac{1}{4}} =$

A) $\dfrac{3}{2}$

B) $\dfrac{1}{3}$

C) $\dfrac{11}{6}$

D) 1

E) 3

Comentario:

Esta es una pregunta que mide la capacidad del estudiante para operar en el conjunto de los números racionales, en específico con fracciones compuestas, las que comienzan a ser desarrolladas en la Enseñanza Básica.

Para resolverla, primero se debe realizar la operación

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

luego, se realiza $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = 2 : \dfrac{3}{4} = \dfrac{8}{3}$

y por último, se resuelve $\dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$

resultado que se encuentra en la opción E).

Los datos estadísticos muestran que esta pregunta resultó fácil, ya que el 71,9% de los postulantes que la abordaron la contestaron correctamente. Un 14,5% de omisión, indica que aun hay bastantes estudiantes que desconocen como operar con fracciones compuestas.

Los alumnos que se equivocaron, se distribuyeron en forma muy parecida entre los distractores, los que consideraban distintos errores que se pueden cometer al operar con fracciones.

2. $4^{-2} + 2^{-3} - 2^{-4} =$

A) $\dfrac{1}{8}$
B) $\dfrac{1}{4}$
C) $\dfrac{1}{6}$
D) -8
E) -6

Comentario:

Este ítem está orientado al contenido de potencias de base positiva y exponente entero. En este caso, el estudiante debe tener la capacidad de aplicar la propiedad de una potencia con exponente negativo, es decir,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Para resolver el ítem, en primer lugar se debe aplicar la propiedad de las potencias indicada anteriormente, luego calcular el valor de ellas, y por último el alumno debe darse cuenta que la primera y tercera fracción se eliminan, tal como se indica a continuación:

$$4^{-2} + 2^{-3} - 2^{-4} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} = \cancel{\frac{1}{16}} + \frac{1}{8} - \cancel{\frac{1}{16}} = \frac{1}{8}$$

Este resultado se encuentra en la opción A), que fue marcado por el 66,7% de los estudiantes, por lo que esta pregunta estadísticamente, también resultó fácil.

El distractor más elegido fue B), y los estudiantes que optaron por él, no supieron operar con potencias, pues lo que hicieron fue sumar y restar las bases y los exponentes de las potencias, por separado, para luego aplicar la propiedad de las potencias de exponente negativo.

En efecto, $4^{-2} + 2^{-3} - 2^{-4} = (4 + 2 - 2)^{-2 + -3 - -4} = 4^{-1} = \dfrac{1}{4}$

En este ítem, y en el anterior, llama la atención el alto porcentaje de omisión (12,1%), pues los conocimientos requeridos para responderlo en forma correcta, son básicos dentro de la matemática. Es importante que los alumnos manejen el concepto de potencias y sus propiedades, ya que son la base de los contenidos de raíces, logaritmos y función exponencial, tratados en tercer y cuarto año medio.

3. Juan dispone de \$ 6.000 para gastar en entretención. Si se sabe que cobran \$ 1.000 por jugar media hora de pool y \$ 600 por media hora en internet, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Juan puede jugar a lo más 3 horas de pool.
II) Juan puede conectarse a lo más 5 horas en internet.
III) Juan puede jugar 1,5 horas de pool y conectarse 2,5 horas a internet.

A) Sólo III
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

Comentario:

Este es un problema contextualizado en el ámbito de los números racionales, que requiere de los estudiantes la capacidad de comprender la información entregada en el enunciado, para con ella determinar el valor de verdad o falsedad de cada una de las afirmaciones de esta pregunta, del tipo combinada.

Para determinar la veracidad de la afirmación I), se debe determinar cuántas veces puede jugar pool Juan, dividiendo \$ 6.000 por \$ 1.000, lo que da 6. Luego como cada juego dura media hora, se tiene que $6 \cdot \dfrac{1}{2}$ hr = 3 hrs es el tiempo que a lo más puede jugar pool con el dinero que tiene. Por lo tanto, la afirmación I) es verdadera.

De igual modo, se tiene que la afirmación II) es verdadera, en efecto,

\$ 6.000 : \$ 600 = 10

$10 \cdot \dfrac{1}{2}$ hr = 5 hrs.

Para verificar la afirmación III), se sabe que 1,5 horas equivalen a 3 medias horas y como cada media hora de pool vale \$ 1.000, entonces se tiene que Juan gasta \$ 3.000 en este juego. De la misma manera, 2,5 horas equivalen a 5 medias horas, y como cada media hora de conexión a internet vale \$ 600, se tiene que Juan gasta \$ 3.000 en esta actividad.

Luego, en total Juan gasta \$ 6.000, lo que indica que la afirmación III) también es verdadera, y por lo tanto la opción correcta es E).

Este problema resulto fácil, ya que el 68,6% de los estudiantes lo contestó correctamente y sólo el 2,1% lo omitió.

La opción B) fue el distractor más elegido, con un 13,1% del alumnado. En este caso, ellos no supieron interpretar correctamente la información dada en la opción III).

4. En un monedero hay **doce** monedas de \$ 5 y **nueve** de \$ 10. Estas 21 monedas representan un cuarto del total de dinero que hay en su interior. Si en el resto de dinero se tiene igual cantidad de monedas de \$ 50 y de \$ 100, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) En total hay 27 monedas.
II) Hay 4 monedas de \$ 50 en el monedero.
III) En el monedero hay \$ 600.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) Sólo II y III

Comentario:

Esta pregunta combinada corresponde a un problema numérico simple, que requiere de saber operar en forma rutinaria con números naturales, y además, los alumnos deben tener la capacidad de resolver ecuaciones lineales simples.

Lo primero que hay que determinar en este problema, es la cantidad de dinero que corresponde a un cuarto del total del dinero que hay en el monedero.

En efecto, $12 \cdot \$\,5 + 9 \cdot \$\,10 = \$\,60 + \$\,90 = \$\,150$

corresponde a un cuarto del total, luego el total del dinero que hay en el monedero es $4 \cdot \$\,150 = \$\,600$, lo que indica que la afirmación III) es verdadera.

El dinero que hay entre monedas de \$ 50 y \$ 100 es $\$\,600 - \$\,150 = \$\,450$, y si **x** es la cantidad de monedas de \$ 50, que es igual a la cantidad de monedas de \$ 100, entonces se tiene que:

$$x \cdot \$\,50 + x \cdot \$\,100 = \$\,450$$
$$x \cdot \$\,150 = \$\,450$$
$$x = \frac{\$\,450}{\$\,150}$$
$$x = 3$$

luego, hay 3 monedas de \$ 50 y no 4 como se indica en la afirmación II), por lo tanto ésta es falsa.

Por otro lado, la afirmación I) es verdadera, ya que al sumar la cantidad de monedas de \$ 5, \$ 10, \$ 50 y \$ 100, se tiene respectivamente que, $12 + 9 + 3 + 3 = 27$ es la cantidad total de monedas que hay en el monedero.

Como sólo las afirmaciones I) y III) son verdaderas, la opción correcta de la pregunta es D).

Este ítem lo contestó correctamente el 41,2% de los estudiantes que lo abordaron y lo omitió el 30,6%, lo que indica que estadísticamente el grado de dificultad del ítem es mediano, y que además existe un gran desconocimiento de cómo resolver este tipo de problema contextualizado.

El 14,9% de los estudiantes marcó el distractor C), los cuales no fueron capaces de calcular correctamente el número de monedas de \$ 50 y de \$ 100, y así determinar la veracidad de las afirmaciones I) y II).

5. Si el 35% de **a** es 4 y el 12% de **b** es 6, entonces el valor de $\frac{b}{a}$ es

A) $\frac{400}{7}$
B) $\frac{35}{8}$
C) $\frac{18}{35}$
D) $\frac{35}{18}$
E) $\frac{8}{35}$

Comentario:

Este ítem está orientado al contenido de porcentaje. Para resolverlo se deben determinar los valores de **a** y **b**, para luego calcular el valor de $\frac{b}{a}$.

Si el 35% de **a** es 4, entonces se tiene $\frac{35}{100} \cdot a = 4$, luego al despejar **a** se llega a que $a = \frac{4 \cdot 100}{35} = \frac{80}{7}$.

De igual manera, si el 12% de **b** es 6, se tiene $\frac{12}{100} \cdot b = 6$, y por lo tanto, $b = \frac{6 \cdot 100}{12} = 50$.

Reemplazando los valores de **a** y **b** en $\frac{b}{a}$ se llega a

$$\frac{50}{\frac{80}{7}} = 50 \cdot \frac{7}{80} = \frac{35}{8}$$

que corresponde a la opción B).

El error más repetido corresponde al distractor E), donde los estudiantes calcularon correctamente los valores de a y b, pero no así el valor de $\frac{b}{a}$.

Este ítem resultó difícil, los datos estadísticos indican que el 38,6% de los estudiantes lo contestó correctamente y el 45,4% lo omitió.

Es importante destacar, que el contenido de porcentaje sigue siendo un problema para los estudiantes, a pesar de que éste comienza a ser estudiado en la Enseñanza Básica.

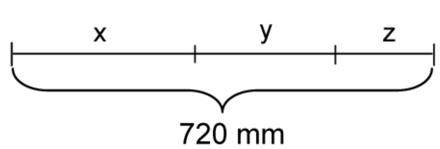
6. Se desea cortar un alambre de 720 mm en tres trozos de modo que la razón de sus longitudes sea 8 : 6 : 4. ¿Cuánto mide cada trozo de alambre, de acuerdo al orden de las razones dadas?

A) 180 mm, 120 mm, 90 mm
B) 420 mm, 180 mm, 120 mm
C) 320 mm, 240 mm, 160 mm
D) 510 mm, 120 mm, 90 mm
E) Ninguna de las medidas anteriores.

Comentario:

Para responder correctamente esta pregunta el estudiante debe saber aplicar el concepto de proporción múltiple, o serie de razones a un problema contextualizado, y resolver ecuaciones lineales rutinarias.

Si representamos con x, y, z las medidas de cada uno de los trozos en que se quiere cortar un alambre de 720 mm, como se muestra en la siguiente figura



Las longitudes x, y, z deben estar en la razón 8 : 6 : 4, luego se tiene que $\frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4} = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.

De esta relación se obtiene que $\frac{x}{8} = k$; $\frac{y}{6} = k$; $\frac{z}{4} = k$

Luego, despejando en función de k se tiene

$$x = 8k, \quad y = 6k, \quad z = 4k. \qquad (1)$$

Por otra parte, como la suma de los trozos x, y, z forman todo el alambre, se tiene que

$$x + y + z = 720 \qquad (2)$$

Si se reemplaza (1) en (2) y se resuelve la ecuación en k, se determina el valor de la constante de proporcionalidad.

En efecto,

$$\begin{aligned} 8k + 6k + 4k &= 720 \\ 18k &= 720 \\ k &= 40 \text{ mm} \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando este valor de k en (1), se obtiene la medida de los trazos solicitados en el problema:

$$\begin{aligned} x &= 8 \cdot 40 \text{ mm} = 320 \text{ mm} \\ y &= 6 \cdot 40 \text{ mm} = 240 \text{ mm} \\ z &= 4 \cdot 40 \text{ mm} = 160 \text{ mm} \end{aligned}$$

Estas medidas se encuentran en la opción C), la cual fue elegida por el 53,5% de los estudiantes, lo que indica que esta pregunta resultó de mediana dificultad.

Hay bastante desconocimiento de los alumnos en el manejo de este tema, ya que el 15,8% de ellos omitió el ítem, y el 12,3% marcó la opción E), ninguna de las medidas anteriores.

Por otro lado, el distractor que fue seleccionado por un 9% de los estudiantes, es la opción A), lo que indica el poco conocimiento que se tiene de este contenido, pues este distractor se obtenía dividiendo 720 mm por 8, por 6 y por 4.

7. En un colegio se necesita colocar en la cocina 70 m^2 de cerámica y 100 m^2 de piso flotante para la sala de computación. Si el metro cuadrado de cerámica cuesta $ **P** y el metro cuadrado de piso flotante es un 75% más caro que la cerámica, entonces el costo total es de

A) $ 145 · P
B) $ 170 · P
C) $ 175 · P
D) $ 245 · P
E) $ 195 · P

Comentario:

La pregunta apunta al contenido relacionado con el planteamiento y resolución de problemas que involucran porcentaje, para lo cual el estudiante debe ser capaz de interpretar las relaciones existentes entre los datos entregados en el enunciado del problema.

Para responder, el estudiante debe determinar el costo de poner cerámica en la cocina, el costo de poner piso flotante en la sala de computación, y luego sumar estas cantidades para encontrar el costo total del trabajo a realizar por el colegio.

Como el metro cuadrado de cerámica es \$ P y se necesita poner 70 m^2 de ella, se tiene que el costo de este trabajo es de \$ 70P.

Por otra parte, el costo del metro cuadrado de piso flotante es $\$\left(P+\frac{75}{100}P\right) = \$\ \frac{175}{100}P$, ya que éste es un 75% más caro que la cerámica. Luego, el costo de poner 100 m^2 de piso flotante es $\$\left(\frac{175}{100}P\cdot 100\right)$ = \$ 175P, lo que implica que el costo total del trabajo a realizar en el colegio es de

$$\$\ 70P + \$\ 175P = \$\ 245P$$

que corresponde a la opción D).

El 10% de los estudiantes eligió el distractor A), que consideraba que el costo del metro cuadrado de piso flotante era sólo $\frac{75}{100}P$, y no $\left(P+\frac{75}{100}P\right)$.

Por otro lado, el 9,5% de los alumnos eligieron el distractor C), que correspondía al costo de colocar sólo el piso flotante y no el costo total del trabajo a realizar en el colegio.

El ítem fue contestado correctamente por el 38,2% de los postulantes y lo omitió el 37,1%, lo que indica estadísticamente, que la pregunta resultó difícil.

Este tipo de problemas, que involucran cálculos de porcentajes, son importantes, y es necesario que los alumnos sean capaces de resolverlos, pues están en estrecha relación con las otras disciplinas del saber y con la vida cotidiana.

8. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones corresponde a calcular el 12,5% del precio de un artículo?

I) $\frac{1}{8}$ del precio del artículo.
II) El precio del artículo multiplicado por 12,5.
III) El precio del artículo dividido por 100 y multiplicado por 12,5.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) Sólo I y III

Comentario:

Para determinar el grado de veracidad de las afirmaciones de esta pregunta combinada, el estudiante debe saber calcular el porcentaje de una cantidad dada y relacionar porcentaje con fracciones.

Es bueno recordar que para calcular el a% de b se debe determinar el valor de

$$\frac{a}{100}\cdot b$$

Por lo tanto, como en la pregunta se pide calcular el 12,5% del precio de un artículo, esto es $\frac{12,5}{100}$ multiplicado por el precio del artículo, lo que implica que la afirmación III) es verdadera y la II) es falsa, pues en esta última falta dividir por 100.

En cuanto a la afirmación I), ésta es verdadera ya que

$$12,5\% = \frac{12,5}{100} = \frac{125}{1.000} = \frac{1}{8}$$

En conclusión, la opción correcta es E).

El 18,9% de los estudiantes eligió el distractor C), donde se observa que estos alumnos calculan bien el porcentaje de una cantidad, pero no saben relacionar porcentaje con fracciones.

Estadísticamente, esta pregunta resultó de mediana dificultad, contestándola correctamente el 47,1% de los estudiantes y omitiéndola el 23,1% de ellos.

9. La ley combinada que rige el comportamiento ideal de un gas es $\frac{P\cdot V}{T}$ = constante, donde **P** es la presión del gas, **V** su volumen y **T** su temperatura absoluta. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) A volumen constante la presión es directamente proporcional a la temperatura.
II) A temperatura constante la presión es inversamente proporcional al volumen.
III) A presión constante el volumen es inversamente proporcional a la temperatura.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

Comentario:

Este ítem requiere que el estudiante sepa relacionar la proporcionalidad directa con cuocientes constantes y la proporcionalidad inversa con productos constantes.

Es decir, si A y B son directamente proporcionales, entonces $\frac{A}{B}$ = constante, y si A y B son inversamente proporcionales, entonces $A \cdot B$ = constante.

Para analizar la veracidad de cada afirmación contenida en esta pregunta hay que considerar como constante, por separado, cada una de las variables de la Ley combinada que rige el comportamiento ideal de un gas, que es $\frac{P \cdot V}{T}$ = constante.

En la afirmación I), es el volumen el que toma un valor constante y si se despejan las variables P y T se tiene que

$$\frac{P}{T} = \frac{\text{constante}}{V} = \text{constante},$$

luego, el cuociente entre P y T es constante, lo que indica que estas variables son directamente proporcionales, por lo tanto esta afirmación es verdadera.

En la afirmación II), la constante es la temperatura, luego al despejar las variables se tiene:

$$P \cdot V = \text{constante} \cdot T = \text{constante},$$

de donde P y V son inversamente proporcionales según la definición. Por lo tanto la afirmación II) también es verdadera.

En cambio, en la afirmación III) si se despeja V y T, ya que la constante en este caso es la presión, se tiene que $\frac{V}{T}$ = constante, lo que indica que V y T son directamente proporcionales, y no inversamente proporcionales, como se afirma en este caso, por lo tanto esta afirmación es falsa.

Como sólo I) y II) son verdaderas, se tiene que la opción correcta es C), la que fue marcada correctamente por apenas el 28,9% de los estudiantes. Además, existe un gran desconocimiento de este tema, ya que el 43,7% de los estudiantes omitió esta pregunta. De los datos estadísticos antes mencionados, este ítem resultó muy difícil.

El resto de los estudiantes que abordaron el ítem, se distribuyeron homogéneamente entre los distractores.

10. Se sabe que **a** es directamente proporcional al número $\frac{1}{b}$ y cuando **a** toma el valor 15, el valor de **b** es 4. Si **a** toma el valor 6, entonces el valor de **b** es

A) 10
B) $\frac{8}{5}$
C) $\frac{5}{8}$
D) $\frac{1}{10}$
E) $\frac{15}{4}$

Comentario:

El contenido involucrado en esta pregunta es de proporcionalidad directa y su constante de proporcionalidad. El estudiante debe recordar que si dos variables son directamente proporcionales entre sí, entonces su cuociente es constante.

En este caso, como **a** es directamente proporcional a $\frac{1}{b}$, se tiene que

$$a : \frac{1}{b} = k, \text{ con k la constante de proporcionalidad} \quad (1)$$

Para responder el problema, primero se debe determinar el valor de k, reemplazando en (1), **a** por 15 y **b** por 4, para luego realizar el cuociente respectivo,

en efecto, $15 : \frac{1}{4} = k$

$$60 = k$$

Para determinar el valor de **b** se reemplaza en (1), a = 6 y k = 60, para luego despejar el valor de **b**

$$6 : \frac{1}{b} = 60$$
$$6b = 60$$
$$b = 10$$

dicho valor se encuentra en la opción A).

El 18,7% de los estudiantes seleccionaron el distractor B), en este caso realizaron en forma correcta todos los procedimientos de resolución del problema, pero consideraron que **a** es directamente proporcional a **b** y no a $\frac{1}{b}$ como lo planteaba el enunciado.

Este ítem, al igual que el anterior resultó, según sus datos estadísticos, muy difícil, ya que lo contestó correctamente sólo el 21,5% de los estudiantes y lo omitió el 42,5%. En conclusión, los estudiantes de la Enseñanza Media tienen graves problemas para relacionar variables proporcionales con constante de proporcionalidad. Cabe hacer presente que este contenido aparece en los programas de Enseñanza Básica.

COMENTARIO DE LAS PREGUNTAS REFERIDAS AL ÁREA TEMÁTICA DE ÁLGEBRA, QUE CORRESPONDEN AL PRIMER AÑO DE LA ENSEÑANZA MEDIA

11. Si n = 2 y m = –3, ¿cuál es el valor de – nm – (n + m)?

A) – 11
B) – 5
C) 5
D) 7
E) – 7

Comentario:

En esta pregunta, el estudiante debe saber valorar expresiones algebraicas. Además, debe saber operar en forma rutinaria en el ámbito de los números enteros, contenido estudiado en la Enseñanza Básica.

Lo primero a realizar en este caso, es reemplazar en la expresión – mn – (m + n) las variables m y n por los valores asignados en el enunciado, para luego resolver el ejercicio, teniendo presente la prioridad de las operaciones:

$$-2 \cdot -3 - (2 + -3) = 6 - (-1) = 6 + 1 = 7,$$

resultado que se encuentra en la opción D).

Según los datos estadísticos, este ítem resultó fácil, puesto que fue contestado correctamente por el 75% de los postulantes y sólo el 1,9% lo omitió. Este último dato indica que el contenido medido en este ítem, es bastante conocido por los alumnos.

Los estudiantes que se equivocaron al contestar esta pregunta, se distribuyeron en forma equitativa entre los distintos distractores, que corresponden a diversos errores que se pueden cometer al operar con los números enteros.

Hay que destacar, que es importante que los estudiantes desarrollen un manejo eficiente en la evaluación de expresiones algebraicas, porque ésta forma parte de la base en la evaluación de funciones.

12. $(3w - 2)^2 - 2(2w - 3)(2w + 3) =$

A) $w^2 - 12w - 14$
B) $w^2 - 12w + 22$
C) $w^2 - 12w - 5$
D) $w^2 - 12w + 13$
E) $w^2 - 12w + 14$

Comentario:

El contenido involucrado en esta pregunta está relacionado con las expresiones algebraicas no fraccionarias y su operatoria. En particular, el estudiante debe saber reducir términos semejantes, y desarrollar los siguientes productos notables:

Cuadrado de un binomio: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Suma por diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Para resolver el ejercicio planteado, se debe desarrollar los productos notables que aparecen, según las reglas antes mencionadas, luego distribuir el –2 en el paréntesis y por último reducir los términos semejantes:

$$\begin{aligned}(3w - 2)^2 - 2(2w - 3)(2w + 3) &= 9w^2 - 12w + 4 - 2(4w^2 - 9)\\ &= 9w^2 - 12w + 4 - 8w^2 + 18\\ &= w^2 - 12w + 22\end{aligned}$$

La expresión resultante se encuentra en la opción B), que fue seleccionada correctamente por el 60% de los estudiantes, por lo que este ítem es considerado estadísticamente fácil. A pesar de esto, la omisión fue de un 14,4%, bastante alta para un ejercicio que debiese ser muy sencillo dentro de la Enseñanza Media.

El distractor A) fue el más elegido, por un 9,2% de los estudiantes. El error cometido por éstos fue que, distribuyeron por 2 y no por –2 en el desarrollo del producto de la suma por diferencia.

Esta pregunta mide la habilidad del estudiante para efectuar operatoria de tipo rutinario con expresiones algebraicas, que es la base para que puedan trabajar bien en el resto de los contenidos matemáticos a los que se enfrentan en el transcurso de la Enseñanza Media, de ahí la importancia que aparezcan este tipo de ítemes en la prueba.

13. Si $4(3x + 3) = 5(6 + 2x)$, entonces **2x** es

A) 9
B) 16
C) 18
D) $\frac{27}{10}$
E) ninguno de los valores anteriores.

Comentario:

El estudiante en este caso, debe ser capaz de resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Es importante que el estudiante haya adquirido la habilidad para resolver este tipo de ecuaciones, pues así contará con las herramientas necesarias para resolver problemas contextualizados y del ámbito de la geometría, así como también podrá trabajar eficientemente en los distintos tópicos de la matemática y otras disciplinas, tratados durante la Enseñanza Media.

Para resolver la ecuación planteada en este ítem, primero se distribuye el 4 y el 5 en los respectivos paréntesis

$$4(3x + 3) = 5(6 + 2x)$$
$$12x + 12 = 30 + 10x$$

luego, se agrupan los términos algebraicos en x a un lado de la igualdad y los números al otro, restando a ambos lados de ellos 10x y 12

$$12x - 10x = 30 - 12$$
$$2x = 18$$

No es necesario despejar el valor de x, pues lo que se pide en el enunciado es el valor de 2x, que es 18, valor que se encuentra en la opción C).

El 9,2% de los estudiantes marcó el distractor A), que corresponde al valor de **x** y no el de **2x**, indicando que existe un porcentaje de alumnos que no lee atentamente lo que se pide en los enunciados de los problemas, a pesar de dominar el contenido involucrado en la pregunta.

El ítem resultó fácil, pues el 68,6% de los estudiantes lo contestó correctamente, pero la omisión de un 11,9% es considerada alta, ya que la ecuación lineal planteada es bastante rutinaria en este nivel de la Enseñanza Media.

14. ¿Cuál de las siguientes expresiones es un factor de $k^2 + k - 6$?

A) $k + 1$
B) $k + 2$
C) $k - 6$
D) $k - 3$
E) $k - 2$

Comentario:

En este caso, el ítem apunta al contenido de factorización de expresiones algebraicas. En particular, la factorización que necesitan manejar los alumnos para responder la pregunta, es la de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$:

$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$ con $p \cdot q = c$ y $p + q = b$

La expresión $k^2 + k - 6$ factorizada según la regla anterior es $(k + p)(k + q)$, donde $p \cdot q = -6$ y $p + q = 1$. Los valores de **p** y **q** que cumplen con estas condiciones son 3 y –2, por lo tanto se tiene que

$$k^2 + k - 6 = (k + 3)(k - 2)$$

En el enunciado se pide por un factor de $k^2 + k - 6$, que podría ser $(k + 3)$ o $(k - 2)$. Al observar las opciones, se ve que el factor $(k - 2)$ se encuentra en la opción E), siendo esta la respuesta correcta del ítem.

El 11,3% de los estudiantes escogieron el distractor C), quienes hicieron una mala factorización de la expresión dada en el enunciado.

Según los datos estadísticos, la pregunta resultó de mediana dificultad, pues el 53% de los alumnos la contestó correctamente y la omisión fue alta para este tipo de ejercicio (23,2%), esto debido a que los estudiantes no entendieron lo que es un factor de $k^2 + k - 6$, o bien, no sabían como factorizar este tipo de expresiones algebraicas.

15. El enunciado: "A un número **d** se le suma su doble, y este resultado se multiplica por el cuadrado del triple de **d**", se escribe

A) $d + 2d \cdot 3d^2$
B) $d + 2d \cdot (3d)^2$
C) $(d + 2d) \cdot (3d)^2$
D) $(d + 2d) \cdot 3d^2$
E) $(d + 2) \cdot (3d)^2$

Comentario:

Para responder esta pregunta, el estudiante debe ser capaz de traducir del lenguaje común al matemático, comprendiendo a cabalidad los datos entregados en el enunciado.

Lo primero que se debe hacer para traducir el enunciado a lenguaje matemático es escribir la suma de **d** con su doble, esto es $(d + 2d)$. Por otra parte se debe traducir el cuadrado del triple de **d**, que es $(3d)^2$, y por último se deben multiplicar estas dos expresiones, resultando $(d + 2d) \cdot (3d)^2$, expresión que se encuentra en la opción C).

La pregunta resultó fácil, ya que los datos estadísticos indican que el 61,6% de los estudiantes la contestó correctamente y sólo el 6,5% la omitió.

Dos fueron los distractores más elegidos, con porcentajes muy parecidos de adhesión entre ellos. El primero fue el B), con un 12,4% de adhesión, donde el error cometido fue el no multiplicar toda la suma por $(3d)^2$, sino que sólo el doble de **d**. El segundo distractor marcado fue D), que fue elegido por el 11,7% de los estudiantes, los que consideraron el cuadrado de **d** y no el cuadrado del triple de **d**, como se pedía, ambos errores muy comunes en este tipo de traducción.

Esta habilidad, de interpretar y traducir del lenguaje común al matemático, es la base para que el estudiante sea capaz de resolver problemas contextualizados.

16. ¿Qué pasa con el área de un triángulo si su altura se divide por dos y se mantiene su base?

A) Se reduce en media unidad cuadrada.
B) Se reduce a la mitad.
C) Se reduce a la cuarta parte.
D) Se reduce en un cuarto de unidad cuadrada.
E) Falta información para decir que ocurre con el área.

Comentario:

El contenido involucrado en este ítem corresponde, al análisis de fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes en relación con la incidencia de la variación de los elementos lineales y viceversa.

Además, el estudiante que enfrente este ítem, debe recordar de la Enseñanza Básica la fórmula que permite determinar el área de un triángulo, que es $A = \frac{b \cdot h}{2}$, con **b** la base del triángulo y **h** la altura respectiva a esa base.

Si la fórmula anterior representa el área del triángulo base, entonces el área del nuevo triángulo, donde la altura se divide por 2 es

$$\frac{b \cdot \frac{h}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

Si se comparan las dos áreas, se observa que el área del nuevo triángulo es la mitad del área del triángulo base, relación que se encuentra expresada en la opción B).

El distractor C), fue el más elegido por los estudiantes con un 8,8%. En este caso, lo que hicieron los alumnos fue multiplicar $\frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h}{2}$, resultando $\frac{b \cdot h}{4}$, luego no compararon esta área con la inicial, sino que simplemente se quedaron con el $\frac{1}{4}$ que aparecía en esta expresión.

La pregunta resultó, según los datos estadísticos fácil, ya que el 60,8% de los postulantes la contestó correctamente y el 19,4% la omitió.

17. Se define $a \lozenge b = a^b + b$ y $a \# b = 2a - 4b$, para a y b números enteros, el valor de $(2 \lozenge 5) \# (-2)$ es

A) 82
B) 66
C) 60
D) 38
E) 22

Comentario:

El contenido involucrado en este ítem, tiene relación con la generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos. Además, el alumno debe ser capaz de operar en forma rutinaria en el ámbito de los números enteros, teniendo muy claro la prioridad de las operaciones.

Para calcular el valor de $(2 \lozenge 5) \# (-2)$, primero se resuelve la operación definida en el paréntesis $(2 \lozenge 5)$.

Como la operación $\lozenge$ se define como $a \lozenge b = a^b + b$, se debe reemplazar **a** por 2 y **b** por 5, para luego calcular el valor de la expresión resultante, según la prioridad de las operaciones:

$$2 \lozenge 5 = 2^5 + 5 = 32 + 5 = 37,$$

de esta forma se tiene que $(2 \lozenge 5) \# (-2) = 37 \# (-2)$.

De igual manera a lo realizado anteriormente, se determina el valor de $37 \# (-2)$, según la operación definida por #,

en efecto, $37 \# (-2) = 2 \cdot 37 - 4 \cdot -2 = 74 - -8 = 82$

resultado que se encuentra en la opción A).

Los datos estadísticos de la pregunta indican, que ésta resultó de mediana dificultad, pues el 45,5% de los estudiantes la contestó en forma correcta. A pesar de esto, la omisión fue alta para este tipo de ejercicio, que requiere sólo de operaciones rutinarias, alcanzando al 46,4%. Por lo tanto, este contenido es desconocido o muy poco tratado en la Enseñanza Media, lo que indica que debe ser introducido dentro de las actividades a realizar en el aula por los docentes.

Los estudiantes que contestaron equivocadamente el ítem, se distribuyeron equitativamente entre todos los distractores, que corresponden a realizar las operaciones con los números enteros incorrectamente.

18. En la figura 1, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El área de ABCD es $a^2 + 2ab + b^2$.
II) El área de la región achurada es $(a + b)^2$.
III) El área de AEFD es $b^2 + ab$.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) Sólo II y III

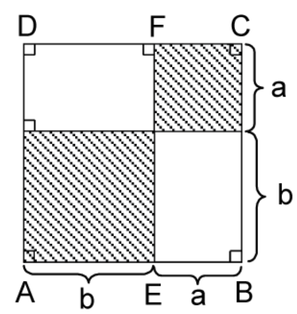


fig. 1

Comentario:

El estudiante que enfrente esta pregunta combinada debe saber desarrollar productos notables, en este caso el cuadrado de un binomio según la regla:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

También, debe saber multiplicar un monomio por un polinomio, y además debe recordar de la Enseñanza Básica que el área de un cuadrado de lado x es x^2, y que el área de un rectángulo de lados x e y es $x \cdot y$.

De la figura se observa que ABCD es un cuadrado de lado $(a + b)$, luego su área es $(a + b)^2$ que, desarrollado según la regla antes mencionada es $a^2 + 2ab + b^2$, por lo tanto la afirmación I) es verdadera.

En el caso de la afirmación II), para determinar el área de la región achurada se debe determinar el área del cuadrado de lado **a**, que es a^2, la del cuadrado de lado **b**, que es b^2 y luego sumarlas. Es decir, el área de la región achurada es $a^2 + b^2$, que es distinto a la expresión $(a + b)^2$, que aparece en esta afirmación, por lo tanto es falsa.

En la última afirmación, el área del rectángulo AEFD de lados **b** y **(b + a)**, equivale a la expresión $b(b + a)$, que desarrollada es $b^2 + ab$, lo que permite decir que la afirmación III) es verdadera.

Debido a que sólo son verdaderas las afirmaciones I) y III), la opción correcta es D).

El 9,6% de los estudiantes seleccionaron el distractor A), que corresponde a calcular el área del rectángulo AEFD en forma errónea.

El 52% de los postulantes contestó correctamente el ítem y el 21,9% lo omitió, por lo que el grado de dificultad de éste, es mediano.

COMENTARIOS PREGUNTAS 19 A 36 FACSÍMIL MATEMÁTICA

El próximo 12 de julio de 2007, aparecerá la segunda parte de la Resolución y Comentarios del facsímil de Matemática, divulgado el 17 de mayo pasado. En tal publicación se comentarán las preguntas 19 a 36.

Jueves 21 de junio: Resolución Facsímil Prueba Historia y Ciencias Sociales. Parte I.
Jueves 28 de junio: Resolución Facsímil Prueba Ciencias, Módulo Común. Parte I.
Jueves 5 de julio: Resolución Facsímil Prueba Lenguaje y Comunicación. Parte II.
Jueves 12 de julio: Resolución Facsímil Prueba Matemática. Parte II.

PREPARA LA PSU® EN TU CASA, CON LOS QUE HACEN LA PSU®.

Exige todos los jueves en El Mercurio las únicas publicaciones y facsímiles oficiales de la PSU® de este año, desarrolladas por la Universidad de Chile.

Toda la información que necesitas para el proceso de admisión 2008 está en El Mercurio.

EL MERCURIO